

第5章 産業連関表の見方・使い方

第5章 産業連関表の見方・使い方

1 産業連関表の見方

すべての産業は、その生産物を他の産業の中間需要として、又は家計や政府などの最終需要として販売し、また一方では、生産のために必要な原材料を他の産業から購入している。このように、各産業間及び産業と家計や政府などの間には、絶えず財貨やサービスの取引が行われている。各産業は、中間需要と中間投入を通じて、産業相互間の依存関係によりその生産活動を行っているといえる。

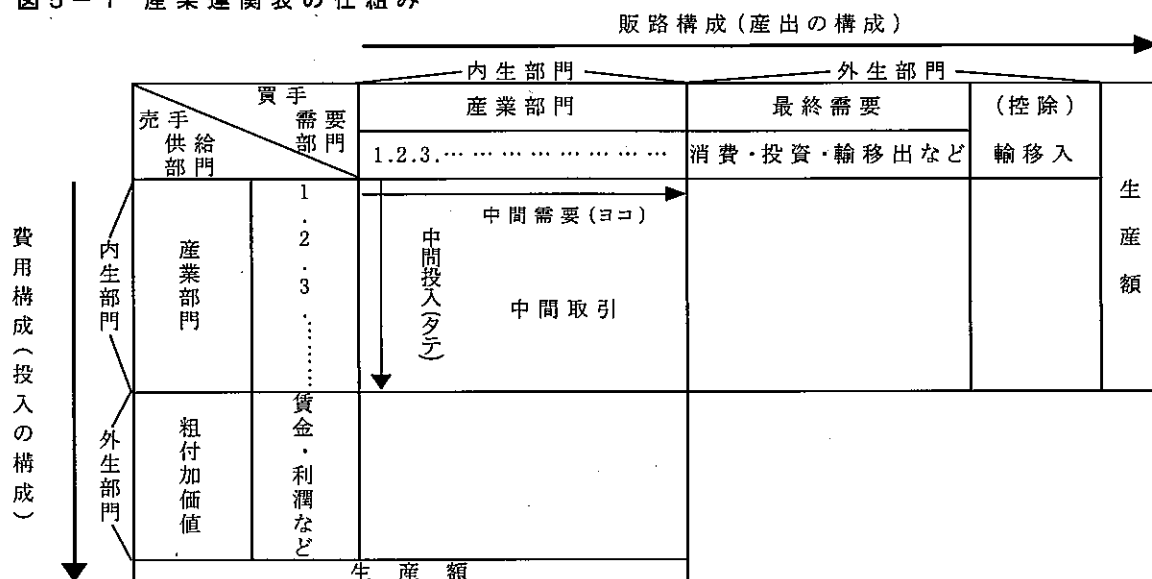
産業連関表とは、一定の期間（通常1年間）に一定の地域内で行われた生産活動によって生じた、産業間及び産業と最終需要（家計消費、一般政府消費等）間の財貨・サービスの取引を一つの表にまとめたものである。この表の中核をなす部分が産業間の取引のつながりを表していることから、産業連関表と呼ばれる。

(1) 内生部門と外生部門

産業連関表の構造を簡単に図示したものが図5-1である。

産業連関表では、生産活動を営む産業部門とそれ以外の非産業部門とに分けている。図5-1で示すように、産業と産業のクロスする部門を内生部門と呼び、最終需要及び粗付加価値を外生部門と呼んでいる。また、内生部門をタテ方向にみて中間投入、ヨコ方向にみて中間需要と呼び、産業間取引の実態を明らかにしている。この中間取引部分である内生部門の数をもってその表のサイズ（行×列）を表す。

図5-1 産業連関表の仕組み



(2) 販路構成と費用構成

次に、産業連関表の読み方についてみると、二つの側面からこれを読むことができる。

一つは、表をヨコ方向の「行」にそって読むことにより、表側の「売手」側にある各産業で生産したそれぞれの生産物がどの部門へどれだけ売られたかという販路構成がわかる。ただし、県内の各産業の生産物の販売のみでは、県内の需要を満たすことができないため、不足分を県外から輸移入することになる。したがって、表の行方向の数字には、県内産品のみでなく輸移入品も含まれる。

もう一つは、同じ表をタテ方向の「列」にそって読むことにより、表頭の「買手」側にある各産業が、生産物をつくるために、原材料等をどの部門からどれだけ仕入れたか、また、生産活動により生み出された粗付加価値（雇用者所得や営業余剰など）はどれだけかという費用構成がわかる。

このように、表をヨコ方向にみていくと販路構成がわかり、タテ方向にみていくと費用構成がわかるというのが、産業連関表の重要な特色である。ところで、費用構成とは、ある産業がその生産物をつくるために、原材料や労働などの生産要素を投入 (Input) した構成であり、また、販路構成とは、そのようにして産出 (Output) された生産物の配分構成にほかならない。産業連関表が、別名「投入産出表」、あるいは両者の頭文字をとって「I-O表」の名で呼ばれるのはこのためであり、その呼び名は、生産活動に即したもののといえる。

(3) 需給バランス

さらに、産業連関表では、各産業部門についてタテ方向の買手（需要部門）の計とヨコ方向の売手（供給部門）の計にそれぞれ生産額を設け、投入と産出を一致させている点にもう一つの特色があり、この需給バランスから導き出される均衡産出高モデルの応用が、産業連関分析の基本である。

(4) 平成17年茨城県産業連関表

ここで、産業連関表を具体的な計数によりみることにする。

表5-1は、今回作成した表を3部門に統合したものである。すなわち、内生部門は、第1次産業、第2次産業、第3次産業の3部門からなっており、外生部門の最終需要も簡略化して、消費、投資、輸移出の3部門にまとめて示している。そして、内生部門の中間需要と最終需要の合計から輸移入を差し引くことにより、県内での生産額が得られる。

また、粗付加価値部門は、経済体系の中でいわば再生産されない労働その他の用役を提供する部門で、生産によって新たに付け加えられる付加価値の形成に寄与し、その価値分配にあずかる部門である。表では、粗付加価値の合計のみを記しているが、ここには雇用者所得、営業余剰等が含まれている。

例えば、第1次産業をタテ方向にみると、平成17年1年間に、自部門から501億円、第2次産業から1103億円、第3次産業から751億円の原材料等を購入しており、これら原材料等の購入総額は「中間投入計」欄に示すように2355億円である。これらの中間投入によって第1次産業は4816億円の生産をあげたことになる。この生産額から中間投入額を差し引いたものが粗付加価値額であり、生産活動の結果2461億円の粗付加価値を生み出したことになる。

次に、第1次産業をヨコ方向にみると、平成17年1年間に、第1次産業は新たに生産した財貨・サービス4816億円のうち、中間需要として、自部門に501億円、第2次産業に3065億円、第3次産業に254億円が販売されている。また、最終需要として792億円が消費として、36億円が投資として県内に販売され、県外または国外に2666億円販売されている。さらに、県内の需要を賅えなかった分として2499億円が県外または国外から輸移入されている。

このように、表の投入と産出の合計は一致しており、表全体として需要・供給がバランスしていることがわかる。

表5-1 平成17年茨城県産業連関表(3部門)

		中間需要				最終需要部門						県内生産額
		第1次産業	第2次産業	第3次産業	中間需要計	消費	投資	輸移出	最終需要計	(控除)輸移入	最終需要部門計	
中間投入	第1次産業	501	3,065	254	3,821	792	36	2,666	3,494	-2,499	995	4,816
	第2次産業	1,103	63,702	11,563	76,368	12,712	20,139	100,339	133,190	-72,544	60,646	137,013
	第3次産業	751	25,023	26,115	51,889	74,848	5,102	9,201	89,151	-30,984	58,166	110,055
	中間投入計	2,355	91,790	37,932	132,077	88,352	25,277	112,205	225,834	-106,027	119,807	251,884
粗付加価値		2,461	45,223	72,123	119,807	(注)1. 四捨五入の関係で内訳は必ずしも合計と一致しない。						
県内生産額		4,816	137,013	110,055	251,884	2. 事務用品は第2次産業、分類不明は第3次産業に算入した。						

2 産業連関表の使い方

産業連関表は、これをそのままの姿で読み取ることによって、経済の取引関係の実態を明らかにすることができるが、表作成の主たる目的は、表から導き出される投入係数や逆行列係数を用いて、産業連関分析を行うことにある。

ここでは、投入係数や逆行列係数の説明と最終需要と生産や粗付加価値などの関係について述べることにする。

(1) 投入係数

まず、簡単なモデルを使って説明することにする。

表5-2は、説明の簡略化のため輸移入を省略した2部門の産業連関表である。

表5-2 産業連関表(仮設例1)

	産業1	産業2	最終需要	県内生産額
産業1	x_{11}	x_{12}	F_1	X_1
産業2	x_{21}	x_{22}	F_2	X_2
粗付加価値	V_1	V_2		
県内生産額	X_1	X_2		

この表において、 X_i 、 V_i 、 F_i は、それぞれ第*i*部門の生産額、粗付加価値、最終需要を意味する。また、 x_{ij} は、第*j*部門が第*i*部門から購入した中間投入額、あるいは、第*i*部門が第*j*部門へ販売した中間需要額である。なお、「 $i=1, 2$ 」, 「 $j=1, 2$ 」である。

第*j*部門が第*i*部門から購入した中間投入額を第*j*部門の生産額で除したものを投入係数といい、 a_{ij} で表す。

これを、表5-2について計算すると、

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{x_{11}}{X_1}, & a_{12} &= \frac{x_{12}}{X_2} \\ a_{21} &= \frac{x_{21}}{X_1}, & a_{22} &= \frac{x_{22}}{X_2} \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

となり、表5-3が得られる。

表5-3 投入係数表

	産業1	産業2
産業1	a_{11}	a_{12}
産業2	a_{21}	a_{22}

①式から明らかなように、投入係数というのは、「ある産業で生産物1単位を生産するのに必要な各産業からの原材料投入量」を意味し、生産物1単位に対する投入原材料の割合を示している。

なお、産業連関分析では、各産業部門が生産活動を行うために投入する原材料等の割合(生産技術構造)は、短期的には変わらない(投入係数の安定性)という仮定をおいている。

また、各産業が原材料として投入した部門(内生部門)の合計を中間投入率といい、粗付加価値を生産額で除した

値を粗付加価値率という。粗付加価値率というのは、「ある産業の生産物1単位に含まれている粗付加価値の割合」を意味している。中間投入率と粗付加価値率を合計すると1になる。

ここで、投入係数を具体的な計数によりみることにする。

表5-4は、表5-1の産業連関表の各産業の投入額を生産額で除して得られた投入係数表である。

表5-4 投入係数表(粗付加価値率を含む)

	第1次産業	第2次産業	第3次産業	内生部門計	
中間投入	第1次産業	0.104104	0.022370	0.002312	0.015169
	第2次産業	0.229039	0.464932	0.105063	0.303186
	第3次産業	0.155910	0.182631	0.237292	0.206003
	計	0.489053	0.669934	0.344666	0.524358
粗付加価値	0.510947	0.330066	0.655334	0.475642	
県内生産額	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	

この表をみると、例えば、第1次産業では、1単位の生産をあげるために、自部門から0.104104、第2次産業から0.229039、第3次産業から0.155910をそれぞれ原材料として中間投入し、その合計は0.489053となっている。そして、その結果0.510947の粗付加価値を生み出したことを示している。

ところで、表5-2をヨコ方向にみると、次の産出バランス式が導かれる。

$$\begin{aligned} \text{産業1} : x_{11} + x_{12} + F_1 &= X_1 \\ \text{産業2} : x_{21} + x_{22} + F_2 &= X_2 \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

この②式は、「中間需要額+最終需要額=生産額」ということを表しており、需要を満たすために生産が行われたということを意味している。これを、需給均衡方程式という。

ここで、①式を次のように変形する。

$$\begin{aligned} x_{11} &= a_{11} X_1, & x_{12} &= a_{12} X_2 \\ x_{21} &= a_{21} X_1, & x_{22} &= a_{22} X_2 \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

この③式を用いて②式を表すと、次のようになる。

$$\begin{aligned} a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + F_1 &= X_1 \\ a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + F_2 &= X_2 \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

つまり、各産業の中間需要を投入係数と生産額を用いて表すことができたことになる。この④式は、もし投入係数が事前に定まっているとすると、未知数が4つ(F_1 、 F_2 、 X_1 、 X_2)の連立方程式である。したがって、最終需要 F_1 、 F_2 が決まれば、残る未知数は生産額 X_1 、 X_2 の2つだけであり、この連立方程式を解くことができる。

つまり、最終需要が決まれば、最終需要を満たすべき産業1と産業2の必要生産額を求めることができる。これが、均衡産出高モデルの考え方である。

次に、今まで述べてきたことを、表5-5の仮設例で計算してみる。

表5-5 産業連関表(仮設例2)

(単位:億円)

	農林水産業	製造業	最終需要	県内生産額
農林水産業	10	50	40	100
製造業	20	100	80	200
粗付加価値	70	50		
県内生産額	100	200		

例えば、農林水産業についてみると、農林水産業は、その生産物100億円を生産するために、自部門から10億円、製造業から20億円の原材料等を投入しており、その結果生み出された粗付加価値は70億円である。農林水産業の生産物1単位当たりの必要投入量を求めると、自部門からは0.1(10÷100)、製造業からは0.2(20÷100)となる。製造業についても同様に求められ、それをまとめたものが表5-6の投入係数表である。

表5-6 投入係数表

	農林水産業	製造業
農林水産業	0.10	0.25
製造業	0.20	0.50
粗付加価値	0.70	0.25
県内生産額	1.00	1.00

ここで、表5-5の仮設例を産出バランス式でみると、次のようになる。

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{ccc}
 \text{中間需要} & \text{最終需要} & \text{生産額} \\
 \begin{array}{c} \text{┌───┐} \\ \text{└───┘} \end{array} & \begin{array}{c} \text{┌───┐} \\ \text{└───┘} \end{array} & \begin{array}{c} \text{┌───┐} \\ \text{└───┘} \end{array} \\
 \text{農林水産業} & 10+50 & + 40 & = & 100 \\
 \text{製造業} & 20+100 & + 80 & = & 200
 \end{array}
 \end{array}$$

この式を投入係数を用いて表すと、次のようになる。

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{ccc}
 \text{中間需要} & \text{最終需要} & \text{生産額} \\
 \begin{array}{c} \text{┌───┐} \\ \text{└───┘} \end{array} & \begin{array}{c} \text{┌───┐} \\ \text{└───┘} \end{array} & \begin{array}{c} \text{┌───┐} \\ \text{└───┘} \end{array} \\
 \text{農業水産業} & 0.1 \times 100 + 0.25 \times 200 + 40 = & & 100 \\
 \text{製造業} & 0.2 \times 100 + 0.5 \times 200 + 80 = & & 200
 \end{array}
 \end{array}$$

ここで、第i産業の最終需要、生産額をそれぞれ F_i 、 X_i と表すと、次のようになる。

$$\left. \begin{array}{l} 0.1X_1 + 0.25X_2 + F_1 = X_1 \\ 0.2X_1 + 0.5X_2 + F_2 = X_2 \end{array} \right\} \dots\dots ⑤$$

この⑤式に仮設例の最終需要 $F_1=40$ 、 $F_2=80$ をあてはめて連立方程式を解くと、 $X_1=100$ 、 $X_2=200$ が求められる。

さて、仮に農林水産業への最終需要が40億円から80億円の、製造業への最終需要が80億円から120億円にそれぞれ増加したとして、このときの農林水産業、製造業の生産額 X_1 、 X_2 がいくらになるかを計算してみる。

$F_1=80$ 、 $F_2=120$ を⑤式にあてはめてみると、次のようになる。

$$\left. \begin{array}{l} 0.1X_1 + 0.25X_2 + 80 = X_1 \\ 0.2X_1 + 0.5X_2 + 120 = X_2 \end{array} \right\} \dots\dots ⑥$$

求める生産額 X_1 、 X_2 は、この連立方程式を解くことによって得られる。

⑥式を移行して整理すると、

$$\left[\begin{array}{l} 0.9X_1 - 0.25X_2 = 80 \quad \dots\dots ⑦ \\ 0.2X_1 - 0.5X_2 = -120 \quad \dots\dots ⑧ \end{array} \right.$$

$$⑦ \times 2 \quad 1.8X_1 - 0.5X_2 = 160 \quad \dots\dots ⑨$$

$$⑨ - ⑧ \text{ から } 1.6X_1 = 280 \quad \therefore X_1 = 175 \quad \dots\dots ⑩$$

$$⑩ \text{ を } ⑦ \text{ に代入して } 0.9 \times 175 - 0.25X_2 = 80 \\
 \therefore X_2 = 310$$

したがって、求める解は、次のようになる。

$$\left[\begin{array}{l} X_1 \text{ (農林水産業の生産額)} = 175 \text{ (億円)} \\ X_2 \text{ (製造業の生産額)} = 310 \text{ (億円)} \end{array} \right.$$

これは、最終需要が農林水産業、製造業ともに40億円ずつ増加したときに、生産水準が、農林水産業は100億円から175億円へ、製造業は200億円から310億円へそれぞれ引き上げられ、最終的な生産増加額は、農林水産業が75億円、製造業が110億円になることを示している。

つまり、最終需要の増加は、各産業がその増加分のみを生産すればよいのではなく、生産過程で原材料に対する需要が発生し、この新たな需要増が各産業の生産を更に誘発し、その結果再び原材料に対する需要が発生する、という金額的には徐々に小さくなりながらも、無限に続く生産の総累積額として上記のような生産額が求まるということである。

次に、投入係数を用いて、最終需要の増加が中間需要を次々に誘発していくという生産の逐次波及過程を考えてみることにする。

⑤式において、まず最終需要 F_1 、 F_2 が与えられると、各産業は、その最終需要を満たすだけの生産を行わなければならない。しかし、この生産を行うためには、投入係数にしたがって原材料等を投入しなければならない(第1次の中間需要の発生)。また、各産業がこの第1次の中間需要を満たすための生産を行うには、さらに投入係数にしたがって原材料等を投入しなければならない(第2次の中間需要の発生)、以下このような関係が次々に繰り返されていき、この過程は無限に続くことになる。

このような生産の波及過程を表5-6の投入係数を用いて、農林水産業と製造業の最終需要がそれぞれ80億円、120億円あった場合を前提として計算した結果が表5-7である。この計算方法は、繰り返し計算法と呼ばれる。

表5-7 生産波及の逐次繰り返し累積過程

(単位:億円)

		農林水産業部門	製造業部門	誘発中間需要
直接効果		農林水産業部門に最終需要が80発生する。	製造業部門に最終需要が120発生する。	
間接波及効果	1次波及	農林水産業は最終需要80を生産するため 農林水産業から $80 \times 0.1 = 8$ 製造業から $80 \times 0.2 = 16$ } を中間投入する	製造業は最終需要120を生産するため 農林水産業から $120 \times 0.25 = 30$ 製造業から $120 \times 0.5 = 60$ } を中間投入する	農林水産業 $8 + 30 = 38$ 製造業 $16 + 60 = 76$
	2次波及	農林水産業は中間需要38を生産するため 農林水産業から $38 \times 0.1 = 3.8$ 製造業から $38 \times 0.2 = 7.6$ } を中間投入する	製造業は中間需要76を生産するため 農林水産業から $76 \times 0.25 = 19$ 製造業から $76 \times 0.5 = 38$ } を中間投入する	農林水産業 $3.8 + 19 = 22.8$ 製造業 $7.6 + 38 = 45.6$
	3次波及	農林水産業は中間需要22.8を生産するため 農林水産業から $22.8 \times 0.1 = 2.28$ 製造業から $22.8 \times 0.2 = 4.56$ } を中間投入する	製造業は中間需要45.6を生産するため 農林水産業から $45.6 \times 0.25 = 11.4$ 製造業から $45.6 \times 0.5 = 22.8$ } を中間投入する	農林水産業 $2.28 + 11.4 = 13.68$ 製造業 $4.56 + 22.8 = 27.36$
	4次波及	農林水産業は中間需要13.68を生産するため 農林水産業から $13.68 \times 0.1 = 1.368$ 製造業から $13.68 \times 0.2 = 2.736$ } を中間投入する	製造業は最終需要27.36を生産するため 農林水産業から $27.36 \times 0.25 = 6.84$ 製造業から $27.36 \times 0.5 = 13.68$ } を中間投入する	農林水産業 $1.368 + 6.84 = 8.208$ 製造業 $2.736 + 13.68 = 16.416$
	5次波及	農林水産業は中間需要8.208を生産するため 農林水産業から $8.208 \times 0.1 = 0.8208$ 製造業から $8.208 \times 0.2 = 1.6416$ } を中間投入する	製造業は最終需要16.416を生産するため 農林水産業から $16.416 \times 0.25 = 4.104$ 製造業から $16.416 \times 0.5 = 8.208$ } を中間投入する	農林水産業 $0.8208 + 4.104 = 4.9248$ 製造業 $1.6416 + 8.208 = 9.8496$
	⋮ ⋮ ⋮	以下同じ計算を繰り返す。 ⋮ ⋮ ⋮	以下同じ計算を繰り返す。 ⋮ ⋮ ⋮	(無限に0に近づく。)

	直接効果 (最終需要)	間接効果(中間需要)						合計
		1次波及	2次波及	3次波及	4次波及	5次波及	⋮	
農林水産業	80	38	22.8	13.68	8.208	4.9248	⋮	175
製造業	120	76	45.6	27.36	16.416	9.8496	⋮	310

(2) 逆行列係数

表5-2の産業連関表のモデルは、簡略化のため、輸移入を含まない単純モデルを例示したが、現実の経済活動は、輸移入を通じて外部経済と強く結びついている。そこで、実際の産業連関表は、表5-8のモデルのように輸移入が計上されている。(ここでは、中間需要を生産額と投入係数を用いて表している。)

最終需要及び最終需要によって誘発される中間需要は、そのすべてを県内の生産活動によって賄われているわけではなく、その一部は県外からの輸移入に依存しており、その分波及効果の県外流出が生じているのである。したがって、輸移入を組み込んだ産業連関表でなければ、正しい経済分析を行うことはできないといえる。ここでは、輸移入の取扱いとそれに対応した逆行列係数の型について述べることにする。

表5-8 産業連関表(仮設例3)

	産業1	産業2	最終需要	輸移入	県内生産額
産業1	$a_{11}X_1$	$a_{12}X_2$	F_1	ΔM_1	X_1
産業2	$a_{21}X_1$	$a_{22}X_2$	F_2	ΔM_2	X_2
粗付加価値	V_1	V_2			
県内生産額	X_1	X_2			

ア. $(I-A)^{-1}(F-M)$ 型

表5-8を行列表示すると、

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \dots\dots ①$$

となる。ここで、投入係数の行列をA、最終需要の列ベクトルをF、輸移入の列ベクトルをM、生産額の列ベクトルをXとして、①式を産出バランス式で表すと、次のようになる。

$$AX + F - M = X \dots\dots ②$$

$$\begin{bmatrix} \text{輸移入品を含む} \\ \text{県内中間需要額} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{輸移入品を含む} \\ \text{最終需要額} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{部門別} \\ \text{輸移入額} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{部門別} \\ \text{県内生産額} \end{bmatrix}$$

この②式は、中間需要と最終需要を加えた需要合計が、県内生産額のみでは賄えず、需要合計から生産額を差し引いた不足分を県外からの輸移入によって満たしているという経済関係を表している。

②式を変形すると、

$$(I-A)X = F - M \quad (\text{ただし、} I \text{ は単位行列})$$

となり、この式に $(I-A)$ の逆行列 $(I-A)^{-1}$ を左から乗じると、各部門の県内での生産水準

$$X = (I-A)^{-1}(F-M) \dots\dots ③$$

が求められる。

この③式には、最終需要(F)と輸移入額(M)がともに外生的に与えられた場合、県内自給分の最終需要(F-M)を満たすために必要な県内生産額(X)が求められることを意味している。

ここで、 $(I-A)^{-1} = (I + A + A^2 + A^3 + \dots)$ であり、③式は、最終需要により誘発される中間需要はすべて県内の生産活動で賄えるとみなしているため、求めた生産額は実際よりも過大になってしまう。

また、輸移入は本来、県内での生産活動に大きく依存しており、内生的には決定されるべき性格をもっているが、このモデルでは生産額(X)が求められないうちに、最終需要とともに輸移入も先決的に与えなければならないという不合理な面がある。

イ. $(I-A+\hat{M})^{-1}F$ 型

このモデル式は、 $(I-A)^{-1}(F-M)$ 型の欠点である輸移入を内生的に取り扱っている。

すなわち、輸移入は県内各産業の生産水準に比例して決定されるという仮定に基づいて、輸移入係数 \hat{M} を次のとおり定義する。

部門別輸移入係数 = $\frac{\text{部門別輸移入額}}{\text{部門別県内生産額}}$, つまり、

$$m_i = \frac{M_i}{X_i} \text{ であり、これを要素とする対角行列 } \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

を \hat{M} とすると、輸移入額の列ベクトルMは、 $M = \hat{M}X$ となる。

これを②式に代入すると、

$$AX + F - \hat{M}X = X$$

となり、この式をXについて整理すると、

$$X = (I - A + \hat{M})^{-1}F \dots\dots ④$$

が求められる。

ここで、 $(I - A + \hat{M})^{-1} = [I - (A - \hat{M})]^{-1} = (I + (A - \hat{M}) + (A - \hat{M})^2 + \dots)$ であり、このモデル式においては、最終需要を与えればそれにより誘発される中間需要は県内産業の生産活動によるものに限定される。

しかし、このモデルには次の2つの欠点がある。

第1に、輸移入額を当該部門の生産額で除して輸移入係数を求めており、輸移入品消費比率はすべての消費部門において一定であるという前提に立っており、必ずしも現実の経済の実態と一致していない点である。また、輸移入額が生産額に比例するという前提にも問題があるだろう。現実の経済の活動では、生産水準が上がれば、むしろその品目の県内自給率が上がり、生産水準が下がれば、輸移入率が上がるものと思われるからである。

第2に、このモデル式においては、最終需要(F)には、県内産品のみでなく輸移入分も含まれており、輸移出についても一定割合で輸移入品が含まれるという点である。つ

まり、産業連関表では、輸移出品は、県内生産物の県外出荷額が計上され、財の単なる通過取引は計上されないのので、輸移出品の中に一定割合で輸移入品が含まれているという仮定は誤っている。

ウ. $[I - (I - \bar{M})A]^{-1} [(I - \bar{M})Fd + E]$ 型

このモデル式は、最終需要を県内最終需要と輸移出に分けて取り扱うことにし、さらに、輸移入係数を生産額に対する輸移入額の割合から、需要合計から輸移出分を除いた県内需要に対する割合に改めることにより、輸移出の中にも輸移入品が含まれるという $(I - A + \hat{M})^{-1}F$ 型モデルの欠点を取り除いたものである。

2つの型の相違点は、次のとおりである。

	最終需要の取扱い	輸移入係数
$(I - A + \hat{M})^{-1}$ 型	最終需要 1 本で取り扱う(輸移出に輸移入品が含まれる)	$\hat{M} = \frac{\text{輸移入品額}}{\text{県内生産額}}$ (県内生産額に比例)
$[I - (I - \bar{M})A]^{-1}$ 型	県内最終需要(消費・投資)と輸移出に分けて取り扱う	$\bar{M} = \frac{\text{輸移入品額}}{\text{県内需要額}}$ (県内需要額に比例)

このモデルでは、

$$\text{輸移入係数} = \frac{\text{輸移入額}}{\text{中間需要} + \text{輸移出を除く最終需要}}$$

と定義され、第 i 部門の輸移入係数は、

$$m_i = \frac{M_i}{(AX + Fd)_i} \dots\dots ⑤$$

となる。この⑤式の分子は第 i 製品の輸移入額、分母は第 i 製品に対する県内需要である。m_i を対角化した行列を \bar{M} とすると、輸移入は、

$$M = \bar{M} (AX + Fd) \dots\dots ⑥$$

と表すことができる。

表 5-9 は、最終需要を県内最終需要(消費及び投資)と輸移出に分けて表した産業連関表である。

表5-9 産業連関表(仮設例4)

	産業1	産業2	県内最終需要	輸移出	輸移入	県内生産額
産業1	$a_{11}X_1$	$a_{12}X_2$	Fd_1	E_1	ΔM_1	X_1
産業2	$a_{21}X_1$	$a_{22}X_2$	Fd_2	E_2	ΔM_2	X_2
粗付加価値	V_1	V_2				
県内生産額	X_1	X_2				

この表を産出バランス式で表すと、

$$AX + Fd + E - M = X$$

輸移入品を含む 県内中間需要額	輸移入品を含む 県内最終需要額	県内産品のみ の輸移入額	部門別 輸移入額	部門別 県内生産額
--------------------	--------------------	-----------------	-------------	--------------

となり、この式に⑥式を代入すると、

$$AX + Fd + E - \bar{M} (AX + Fd) = X$$

となり、この式を X について整理すると、県内での生産水準を示す

$$X = [I - (I - \bar{M})A]^{-1} [(I - \bar{M})Fd + E] \dots\dots ⑦$$

なお、この⑦式においても、中間需要と県内最終需要の各産業部門で、輸移入品の消費割合は一定であるという仮定に基づいている。ここで、 $(I - \bar{M})$ は、県内需要に対する輸移入品消費割合を除いた県内自給率、 $(I - \bar{M})A$ は、輸移入品消費率が同一と仮定した場合の各産業部門での県内産品投入係数、 $(I - \bar{M})Fd$ は、同じ仮定のもとでの県内産品に対する県内最終需要である。

これは、このモデルが競争輸移入方式(消費される財貨が県内産品であるか輸移入品であるかを区別せず一括して表示する方式)の産業連関表に基づいて組み立てられている以上やむを得ないことであり、最終需要を県内最終需要と輸移出に分けて取り扱っている点で、 $(I - A + \hat{M})^{-1}F$ 型と比べて、より実態に即したものになっている。

ところで、このような波及効果の輸移入による県外への流出分については、 $(I - A)^{-1}$ 型逆行列係数の列和と $[I - (I - \bar{M})A]^{-1}$ 型逆行列係数の列和の差を求めることにより明らかになる。表 5-10 によりこれを見ると、例えば、第 1 次産業に 1 億円の輸移出が生じた場合の波及効果は 2 億 509 万円であり、1 億 3258 万円が県内自給分、その差額の 7252 万円が県外流出分である。また、 $(I - A)^{-1}$ 型の列和に対する $[I - (I - \bar{M})A]^{-1}$ 型の列和の割合を求めたものが県内歩留り率であり、 $(100 - \text{県内歩留り率})$ が県外流出率である。

県内歩留り率を産業別にみると、第 3 次産業 (77.2%) が最も高く、次いで第 1 次産業 (64.6%)、第 2 次産業 (56.0%) の順になっている。

ここで、注意を要する点は、県内歩留り率は、波及効果の大きさを示すものではないという点であり、波及効果の大きさは、逆行列係数の列和でみるべきである。

表 5-10 生産波及効果の県内歩留り率と県外流出率

	$(I - A)^{-1}$ 型 列和 (A)	$[I - (I - \bar{M})A]^{-1}$ 型 列和 (B)	県外流出分 (A) - (B)	県内歩留り率 (%) (B) / (A) × 100	県外流出率 (%) 100 - 県内歩留り率
第 1 次産業	2.050928	1.325768	0.725160	64.6	35.4
第 2 次産業	2.522927	1.413907	1.109021	56.0	44.0
第 3 次産業	1.664866	1.284459	0.380407	77.2	22.8

(注) (A) は表 5-11, (B) は表 5-12 より求めた。

(3) 影響力係数と感応度係数

表5-11と表5-12は、表5-1の産業連関表(3部門)より作成した $(I-A)^{-1}$ 型と $[I-(I-M)A]^{-1}$ 型の逆行列係数表である。この2つを比べると、 $(I-A)^{-1}$ 型は、輸移入を内生的に取り扱っていないので、最終需要によって誘発される中間需要は、すべて県内産業で賄えるという形になっており、輸移入を内生的に取り扱っている $[I-(I-M)A]^{-1}$ 型よりも波及効果が過大になり、各産業部門の列和はすべて $[I-(I-M)A]^{-1}$ 型よりも大きくなっている。

表5-11 逆行列係数表 $(I-A)^{-1}$ 型

	第1次産業	第2次産業	第3次産業	行和	感応度係数
第1次産業	1.131016	0.050847	0.010432	1.192295	0.573336
第2次産業	0.555660	1.986110	0.275270	2.817040	1.354624
第3次産業	0.364252	0.485970	1.379164	2.229387	1.072040
列和	2.050928	2.522927	1.664866	6.238722	—
影響力係数	0.986225	1.213194	0.800581	—	2.079574

表5-12 逆行列係数表 $[I-(I-M)A]^{-1}$ 型

	第1次産業	第2次産業	第3次産業	行和	感応度係数
第1次産業	1.051893	0.013218	0.001944	1.067054	0.795491
第2次産業	0.103010	1.194814	0.051635	1.349459	1.006024
第3次産業	0.170866	0.205875	1.230880	1.607621	1.198485
列和	1.325768	1.413907	1.284459	4.024134	—
影響力係数	0.988363	1.054070	0.957567	—	1.341378

そこで、より現実の経済活動を反映している $[I-(I-M)A]^{-1}$ 型逆行列係数により、波及効果の実態をみてみることにする。表5-12において、例えば、第1次産業に1億円の輸移入が発生すると、第1次産業は直接分の1億円のほかに、間接的な波及効果により519万円分の生産をしなければならず、同様に、第2次産業には1030万円、第3次産業には1709万円の生産誘発額が生じ、産業全体では、1億3258万円の生産増が生じる。

このように、逆行列係数の列和は、その列部門の産業に1単位の最終需要が生じた場合に、産業全体に誘発される生産量を示している。したがって、部門別列和を全部門の列和の平均で除すことにより、どの列部門に対する単位当たりの最終需要が産業全体に与える影響の度合いが強いかわることができる。これが影響力係数であり、次の式で表される。

$$\text{影響力係数} = \frac{\text{逆行列係数の各部門の列和}}{\text{逆行列係数の列和の平均値}}$$

例えば、第1次産業の影響力係数は、次のように求められる。

第1次産業の影響力係数 =

$$\frac{1.325768}{(1.325768 + 1.413907 + 1.284459) \div 3} = 0.988363$$

この係数が1より大きい部門は、影響力が産業平均より大きいことになる。

また、逆行列係数表をヨコ方向にみると、ある行部門の行和は、各列部門に最終需要が1単位ずつ生じたとき、その行部門が直接、間接に供給すべき生産量を示している。したがって、部門別行和を全部門の行和の平均で除すことにより、各列部門に1単位ずつ最終需要が生じた場合に、どの行部門がどれくらい影響を受けるか、その受ける影響の度合いを知ることができる。これが感応度係数であり、次の式で表される。

$$\text{感応度係数} = \frac{\text{逆行列係数の各部門の行和}}{\text{逆行列係数の行和の平均値}}$$

例えば、第1次産業の感応度係数は、次のように求められる。

$$\text{第1次産業の感応度係数} = \frac{1.067054}{(1.067054 + 1.349459 + 1.607621) \div 3} = 0.795491$$

この係数が1より大きい部門は、感応度が産業平均より大きいことになる。

一般に、影響力係数は、各部門からの直接、間接の原材料投入率が高く、かつ、原材料となる部門の輸移入率が低い部門で大きく、感応度係数は、需要部門が多岐にわたり、中間需要率が高く、かつ、輸移入率が低い部門で大きくなる。

(4) 最終需要による生産誘発

ア. 生産誘発額

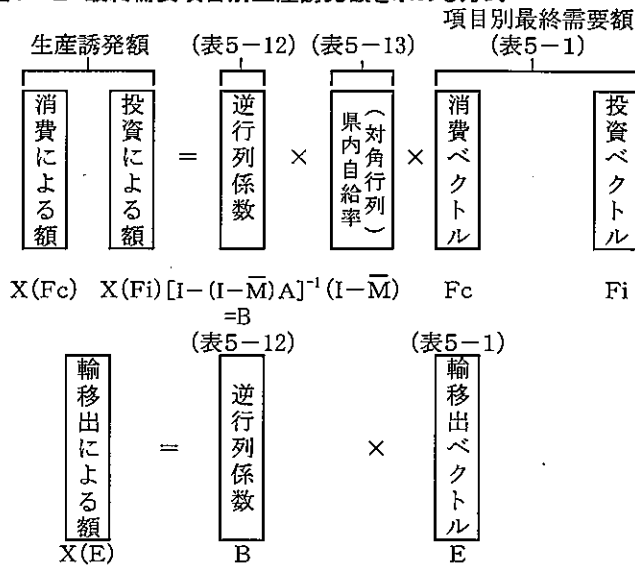
各産業部門は、生産に必要な原材料としての需要である中間需要や消費、投資、輸移出等の最終需要を満たすために生産を行うが、究極的にはすべて最終需要を満たすために生産活動を行っていると考えられる。

このことは、逆に、すべての生産は究極的には最終需要によって誘発されるということであり、このようにして誘発された生産額を最終需要による生産誘発額と呼んでいる。

これにより、各産業部門の生産がどの最終需要によって支えられているかがわかれば、最終需要の変動に対する各部門への影響を測定することができる。

最終需要項目別生産誘発額は、あらかじめ求められた逆行列係数に、項目別最終需要額を乗じることにより求められる。また、このようにして求めた最終需要項目別生産誘発額を各部門別に行合計(ヨコ方向)すると、それぞれの部門の生産額に等しくなる。

図5-2 最終需要項目別生産誘発額を求める方式



<最終需要項目別生産誘発額の求め方>

生産誘発額は、図5-2のように、県内最終需要(消費・投資)によるもの及び輸移出によるものの2つに分けて求める。輸移出を別に算出するのは、輸移出品はすべて県内産品であり、輸移入品を含まないという産業連関表の前提によるものである。

(ア) 表5-1より県内自給率を求め(表5-13)、それを消費及び投資に乗じて県内産品に対する最終需要を求める。

表5-13 輸移入率と県内自給率

	輸移入率	県内自給率
第1次産業	0.537523	0.462477
第2次産業	0.664209	0.335791
第3次産業	0.235018	0.764982
合計	0.431521	0.568479

- (注) 1. 輸移入率=輸移入額÷県内需要額
 2. 県内需要額=中間需要計+県内最終需要額
 3. 県内自給率=1-輸移入率

表5-14 県内生産品に対する最終需要

(単位: 億円)

	消費 (I-M) Fc	投資 (I-M) Fi	輸移出 (E)
第1次産業	0.462477 × 792 = 366	0.462477 × 36 = 17	2,666
第2次産業	0.335791 × 12,712 = 4,269	0.335791 × 20,139 = 6,763	100,339
第3次産業	0.764982 × 74,848 = 57,257	0.764982 × 5,102 = 3,903	9,201
合計	61,892	10,682	112,205

(イ) 各最終需要項目別に生産誘発額を計算する。

($B = [I - (I - \bar{M})A]^{-1}$ とする。)

① 消費による生産誘発額

(表5-12) (表5-14)

$$B \cdot (I - \bar{M}) Fc = \begin{bmatrix} 1.051893 & 0.013218 & 0.001944 \\ 0.103010 & 1.194814 & 0.051635 \\ 0.170866 & 0.205875 & 1.230880 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 366 \\ 4,269 \\ 57,257 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 553 \\ 8,094 \\ 71,418 \end{bmatrix}$$

② 投資による生産誘発額

(表5-12) (表5-14)

$$B \cdot (I - \bar{M}) Fi = \begin{bmatrix} 1.051893 & 0.013218 & 0.001944 \\ 0.103010 & 1.194814 & 0.051635 \\ 0.170866 & 0.205875 & 1.230880 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 17 \\ 6,763 \\ 3,903 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 114 \\ 8,283 \\ 6,199 \end{bmatrix}$$

③ 輸移出による生産誘発額

(表5-12) (表5-14)

$$B \cdot E = \begin{bmatrix} 1.051893 & 0.013218 & 0.001944 \\ 0.103010 & 1.194814 & 0.051635 \\ 0.170866 & 0.205875 & 1.230880 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2,666 \\ 100,339 \\ 9,201 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,148 \\ 120,636 \\ 32,438 \end{bmatrix}$$

(ウ) 計算結果をまとめる。

表5-15 最終需要項目別生産誘発額

(単位: 億円)

	消費	投資	輸移出	合計
第1次産業	553	114	4,148	4,816
第2次産業	8,094	8,283	120,636	137,013
第3次産業	71,418	6,199	32,438	110,055
合計	80,065	14,597	157,222	251,884

↑
生産額と一致する。

(注) 四捨五入の関係で内訳は必ずしも合計と一致しない。

この表をみると、県内生産品に対する消費額6兆1892億円により、1.29倍の8兆65億円の生産が誘発され、同様に県内生産品に対する投資額1兆682億円により、1.37倍の1兆4597億円、輸移出額11兆2205億円により、1.40倍の15兆7222億円の生産がそれぞれ誘発された。そして、その合計は、県内生産額の25兆1884億円と一致する。

また、第1次産業を例にとると、消費で553億円、投資で114億円、輸移出で4148億円の生産がそれぞれ誘発され、その合計は、第1次産業の県内生産額4816億円と一致する。

なお、ここで注意を要する点は、例えば、第1次産業の輸移出による生産誘発額といった場合、第1次産業の輸移出のみによる誘発額ということではなく、すべての産業の輸移出による第1次産業の生産誘発額を意味する点である。

イ. 生産誘発係数

最終需要項目別生産誘発額(表5-15)をそれぞれ対応する最終需要の合計額(表5-1の最終需要の列計)で除すことにより求められ、項目別最終需要1単位が各産業の生産をどれだけ誘発するかを示している。

<計算方法>

$$\text{生産誘発係数} = \frac{\text{最終需要項目別生産誘発額}}{\text{最終需要項目別合計(列計)}}$$

(ア) この式により、次のように求める。

	消費	投資	輸移出	合計
第1次産業	553 ÷ 88,352 = 0.006258	114 ÷ 25,277 = 0.004529	4,148 ÷ 112,205 = 0.036970	4,816 ÷ 225,834 = 0.021324
第2次産業	8,094 ÷ 88,352 = 0.091616	8,283 ÷ 25,277 = 0.327695	120,636 ÷ 112,205 = 1.075134	137,013 ÷ 225,834 = 0.606699
第3次産業	71,418 ÷ 88,352 = 0.808339	6,199 ÷ 25,277 = 0.245249	32,438 ÷ 112,205 = 0.289093	110,055 ÷ 225,834 = 0.487327
合計	80,065 ÷ 88,352 = 0.906213	14,597 ÷ 25,277 = 0.577473	157,222 ÷ 112,205 = 1.401198	251,884 ÷ 225,834 = 1.115350

(イ) 計算結果をまとめる。

表5-16 最終需要項目別生産誘発係数

	消費	投資	輸移出	平均
第1次産業	0.006258	0.004529	0.036970	0.021324
第2次産業	0.091616	0.327695	1.075134	0.606699
第3次産業	0.808339	0.245249	0.289093	0.487327
合計	0.906213	0.577473	1.401198	1.115350

この表をみると、例えば、1億円の消費が生じると、第1次産業は63万円、第2次産業は916万円、第3次産業は8083万円の生産が誘発され、全産業では9062万円の生産が誘発されることを示している。この係数が大きいものほど、生産誘発効果大きい。したがって、本県の場合は、輸移出増があった場合が最も生産誘発効果大きいことになる。

ウ. 生産誘発依存度

各最終需要により誘発された産業別の生産誘発額を生産誘発額合計(行計)で除すことにより求められる。つまり、各産業ごとの消費、投資、輸移出による生産誘発額の構成比のことである。この構成比をみることにより、各産業の生産額がどの最終需要項目によりどれくらい誘発されているかがわかる。

<計算方法>

$$\text{生産誘発依存度} = \frac{\text{最終需要項目別生産誘発額}}{\text{産業別生産誘発額合計}}$$

(ア) この式により、次のように求める。

	消費	投資	輸移出	合計
第1次産業	553 ÷ 4,816 = 0.114811	114 ÷ 4,816 = 0.023774	4,148 ÷ 4,816 = 0.861415	4,816 ÷ 4,816 = 1.000000
第2次産業	8,094 ÷ 137,013 = 0.059078	8,283 ÷ 137,013 = 0.060456	120,636 ÷ 137,013 = 0.880467	137,013 ÷ 137,013 = 1.000000
第3次産業	71,418 ÷ 110,055 = 0.648930	6,199 ÷ 110,055 = 0.056328	32,438 ÷ 110,055 = 0.294742	110,055 ÷ 110,055 = 1.000000
合計	80,065 ÷ 251,884 = 0.317866	14,597 ÷ 251,884 = 0.057951	157,222 ÷ 251,884 = 0.624183	251,884 ÷ 251,884 = 1.000000

(イ) 計算結果をまとめる。

表5-17 最終需要項目別生産誘発依存度

	消費	投資	輸移出	合計
第1次産業	0.114811	0.023774	0.861415	1.000000
第2次産業	0.059078	0.060456	0.880467	1.000000
第3次産業	0.648930	0.056328	0.294742	1.000000
平均	0.317866	0.057951	0.624183	1.000000

この表をみると、本県の生産額のうち62.4%が輸移出により誘発されており、輸移出依存型といえる。また、産業別にみると、第1次産業、第2次産業はそれぞれ輸移出に86.1%、88.0%依存しており、輸移出依存型といえ、第3次産業は消費に64.9%依存しており、消費依存型といえる。

(5) 最終需要による粗付加価値誘発

ア. 総合粗付加価値係数

生産額に対する粗付加価値額の割合を粗付加価値率（粗付加価値係数）といい、生産物1単位当たりの粗付加価値比率を示している。

前述したとおり、生産は最終需要によって誘発されるから、その関係を通じて、最終需要はまた粗付加価値を誘発する源泉といえる。そこで、ある産業に1単位の最終需要が生じたときに、直接、間接に誘発されるすべての産業の粗付加価値を示すのが総合粗付加価値係数である。

総合粗付加価値係数は、県内最終需要（消費・投資）によるものと輸移出によるものとがある。これは、輸移出品はすべて県内産品であり、輸移入品を含まないという産業連関表の前提によるものである。

粗付加価値係数（ \hat{V} ）に $[I - (I - \bar{M})A]$ -型逆行列係数（B）を乗じたものの列和が輸移出による総合粗付加価値係数であり、この係数にさらに県内自給率行列（ $I - \bar{M}$ ）を乗じたものの列和が県内最終需要による総合粗付加価値係数である。

<輸移出による総合粗付加価値係数の求め方>

(7) 粗付加価値係数（ \hat{V} ）×逆行列係数（B）を求める。

$$\begin{aligned} \hat{V}B &= \begin{bmatrix} 0.510947 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.330066 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 0.655334 \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} 1.051893 & 0.013218 & 0.001944 \\ 0.103010 & 1.194814 & 0.051635 \\ 0.170866 & 0.205875 & 1.230880 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.537461 & 0.006754 & 0.000993 \\ 0.034000 & 0.394367 & 0.017043 \\ 0.111974 & 0.134917 & 0.806637 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(i) $\hat{V}B$ の列和を求める。

$$\begin{aligned} i(\hat{V}B) &= (\quad 1 \quad \quad 1 \quad \quad 1 \quad) \\ &\times \begin{bmatrix} 0.537461 & 0.006754 & 0.000993 \\ 0.034000 & 0.394367 & 0.017043 \\ 0.111974 & 0.134917 & 0.806637 \end{bmatrix} \\ &= (0.683435 \quad 0.536038 \quad 0.824673) \end{aligned}$$

(7) 計算結果をまとめる。

表5-18 輸移出に係る粗付加価値準逆行行列係数及び総合粗付加価値係数

$\hat{V}B$	第1次産業	第2次産業	第3次産業
第1次産業	0.537461	0.006754	0.000993
第2次産業	0.034000	0.394367	0.017043
第3次産業	0.111974	0.134917	0.806637
総合粗付加価値係数	0.683435	0.536038	0.824673

<消費及び投資による総合粗付加価値係数の求め方>

(7) 輸移出に係る準逆行行列係数（ $\hat{V}B$ ）×県内自給率行列（ $I - \bar{M}$ ）を求める。

$$\begin{aligned} \hat{V}B(I - \bar{M}) &= \begin{bmatrix} 0.537461 & 0.006754 & 0.000993 \\ 0.034000 & 0.394367 & 0.017043 \\ 0.111974 & 0.134917 & 0.806637 \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} 0.462477 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.335791 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 0.764982 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.248563 & 0.002268 & 0.000760 \\ 0.015724 & 0.132425 & 0.013038 \\ 0.051785 & 0.045304 & 0.617063 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(i) $\hat{V}B(I - \bar{M})$ の列和を求める。

$$\begin{aligned} i[\hat{V}B(I - \bar{M})] &= (\quad 1 \quad \quad 1 \quad \quad 1 \quad) \\ &\times \begin{bmatrix} 0.248563 & 0.002268 & 0.000760 \\ 0.015724 & 0.132425 & 0.013038 \\ 0.051785 & 0.045304 & 0.617063 \end{bmatrix} \\ &= (0.316073 \quad 0.179997 \quad 0.630860) \end{aligned}$$

(7) 計算結果をまとめる。

表5-19 県内最終需要に係る粗付加価値準逆行行列係数及び総合粗付加価値係数

$\hat{V}B(I - \bar{M})$	第1次産業	第2次産業	第3次産業
第1次産業	0.248563	0.002268	0.000760
第2次産業	0.015724	0.132425	0.013038
第3次産業	0.051785	0.045304	0.617063
総合粗付加価値係数	0.316073	0.179997	0.630860

表5-18及び表5-19をみると、いずれも第3次産業の財貨・サービスが輸移出や消費・投資されたときに全産業に誘発される粗付加価値の合計が最も大きい。これは、第3次産業の粗付加価値率が高いからである。

イ. 粗付加価値誘発額

粗付加価値誘発額は、粗付加価値係数に生産誘発額を乗じる方式（図5-3）と粗付加価値係数に逆行行列係数を乗じ、さらに項目別最終需要を乗じる方式（図5-4）の2通りの求め方があり、いずれも結果は同じになる。

また、これを各産業別に合計したものは、各産業の粗付加価値額に等しくなる。

図5-3 生産誘発額から粗付加価値誘発額を求める方式

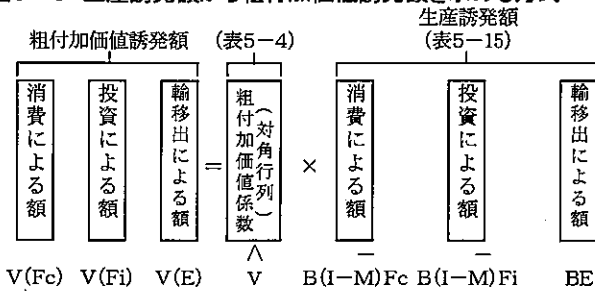
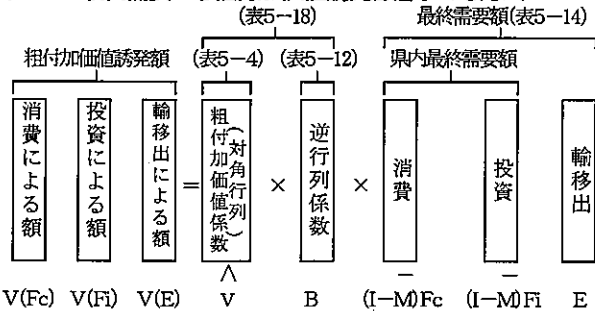


図5-4 最終需要から粗付加価値誘発額を求める方式



<最終需要項目別粗付加価値誘発額の求め方>

ここでは、表5-14及び表5-18を用いて図5-4の方式により粗付加価値誘発額を求めることにする。

(ア) 消費による粗付加価値誘発額を求める。

$$\hat{V} \cdot B \cdot (I-M) F_c = \begin{bmatrix} 0.537461 & 0.006754 & 0.000993 \\ 0.034000 & 0.394367 & 0.017043 \\ 0.111974 & 0.134917 & 0.806637 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 366 \\ 4,269 \\ 57,257 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 282 \\ 2,672 \\ 46,803 \end{bmatrix}$$

(イ) 投資による粗付加価値誘発額を求める。

$$\hat{V} \cdot B \cdot (I-M) F_i = \begin{bmatrix} 0.537461 & 0.006754 & 0.000993 \\ 0.034000 & 0.394367 & 0.017043 \\ 0.111974 & 0.134917 & 0.806637 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 17 \\ 6,763 \\ 3,903 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 58 \\ 2,734 \\ 4,063 \end{bmatrix}$$

(ウ) 輸移出による粗付加価値誘発額を求める。

$$\hat{V} \cdot B \cdot E = \begin{bmatrix} 0.537461 & 0.006754 & 0.000993 \\ 0.034000 & 0.394367 & 0.017043 \\ 0.111974 & 0.134917 & 0.806637 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2,666 \\ 100,339 \\ 9,201 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,120 \\ 39,818 \\ 21,258 \end{bmatrix}$$

(エ) 計算結果をまとめる。

表5-20 最終需要項目別粗付加価値誘発額

	消費	投資	輸移出	合計
第1次産業	282	58	2,120	2,461
第2次産業	2,672	2,734	39,818	45,223
第3次産業	46,803	4,063	21,258	72,123
合計	49,757	6,855	63,195	119,807

↑
粗付加価値額と一致する

(注) 四捨五入の関係で内訳は必ずしも合計と一致しない。

この表をみると、県内産品に対する消費額6兆1892億円により、4兆9757億円の粗付加価値が誘発され、同様に県内産品に対する投資額1兆682億円により6855億円、輸移出額11兆2205億円により6兆3195億円の粗付加価値がそれぞれ誘発される。そして、その合計は、粗付加価値額11

兆9807億円と一致する。

また、第2次産業を例にとると、消費で2672億円、投資で2734億円、輸移出で3兆9818億円の粗付加価値がそれぞれ誘発され、その合計は、第2次産業の粗付加価値額4兆5223億円と一致する。

ウ. 粗付加価値誘発係数

最終需要項目別粗付加価値誘発額(表5-20)をそれぞれ対応する最終需要の合計額(表5-1の最終需要の列計)で除すことにより求められ、項目別最終需要1単位が各産業の粗付加価値をどれだけ誘発するかを示している。

<計算方法>

$$\text{粗付加価値誘発係数} = \frac{\text{最終需要項目別粗付加価値誘発額}}{\text{最終需要項目別合計(列計)}}$$

表5-21 最終需要項目別粗付加価値誘発係数

	消費	投資	輸移出	平均
第1次産業	0.003197	0.002314	0.018890	0.010895
第2次産業	0.030239	0.108161	0.354865	0.200251
第3次産業	0.529732	0.160720	0.189453	0.319362
合計	0.563168	0.271195	0.563208	0.530508

この表をみると、最終需要合計では、1億円の最終需要が生じると、5305万円の粗付加価値が誘発されることを示している。輸移出入のない封鎖経済では、1単位の最終需要が生じると、必ず1単位の粗付加価値が誘発されるが、現実の開放経済では粗付加価値の県外流出が生じる。したがって、1億円との差額4695万円が県外流出分である。

また、最終需要項目別にみると、輸移出(0.563208)の粗付加価値誘発効果が最も大きく、次いで消費(0.563168)、投資(0.271195)の順になっている。

エ. 粗付加価値誘発依存度

各最終需要により誘発された産業別の粗付加価値誘発額を粗付加価値誘発額合計(行計)で除すことにより求められる。つまり、各産業ごとの消費、投資、輸移出による粗付加価値誘発額の構成比のことである。この構成比をみるにより、各産業の粗付加価値額がどの最終需要項目によりどれくらい誘発されているかがわかる。

<計算方法>

$$\text{粗付加価値誘発依存度} = \frac{\text{最終需要項目別粗付加価値誘発額}}{\text{産業別粗付加価値誘発額合計}}$$

表5-22 最終需要項目別粗付加価値誘発依存度

	消費	投資	輸移出	合計
第1次産業	0.114811	0.023774	0.861415	1.000000
第2次産業	0.059078	0.060456	0.880467	1.000000
第3次産業	0.648930	0.056328	0.294742	1.000000
平均	0.415309	0.057218	0.527473	1.000000

この表をみると、本県の粗付加価値額のうち52.7%が輸移出により誘発されており、輸移出依存型といえる。

(6) 最終需要による輸移入誘発

ア. 総合輸移入係数

各産業部門は、需要を賄うために生産を行うが、県内産品だけでは需要をすべて賄えないため、不足分は輸移入によって補うことになる。

既に述べたとおり、生産は究極的には最終需要によって誘発されるが、その生産を行うために直接、間接に必要な輸移入額も最終需要により誘発されるといえる。

先にみたとおり、 $[I - (I - \bar{M}) A]^{-1} (=B)$ 型モデルでは、

$$\text{輸移入額 } M = \bar{M} \cdot (AX + Fd) \dots\dots\dots ①$$

$$\text{生産額 } X = B \cdot [(I - \bar{M}) Fd + E] \dots\dots\dots ②$$

と定義される。ここで、②式を①式に代入すると、

$$M = \bar{M} A B (I - \bar{M}) Fd + \bar{M} A B E + \bar{M} Fd$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{県内産品県内最終需要} \\ \text{による生産誘発額に占} \\ \text{める輸移入品投入額} \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} \text{輸移出による生産} \\ \text{誘発額に占める輸} \\ \text{移入品投入額} \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} \text{県内最終需} \\ \text{要の直接輸} \\ \text{移入分} \end{array} \right]$$

$$= [\bar{M} A B \cdot (I - \bar{M}) + \bar{M}] Fd + \bar{M} A B E$$

となり、輸移入額 (M) は、県内最終需要 (Fd) 及び輸移出 (E) のそれぞれにより誘発されるものの合計として表される。

したがって、県内最終需要 (消費・投資) 及び輸移出に対応するものとして $[\bar{M} A B (I - \bar{M}) + \bar{M}]$ と $\bar{M} A B$ の2種類の係数が求められ、この係数に、県内最終需要及び輸移出をそれぞれ乗じることにより輸移入誘発額が求められる。

これらの係数の列和が総合輸移入係数であり、最終需要が1単位生じたときの直接、間接のすべての産業の輸移入誘発水準を示している。

<輸移出による総合輸移入係数の求め方>

(7) 輸移入係数 (対角行列) $(\bar{M}) \times$ 投入係数 (A) を求める。

$$\begin{aligned} \bar{M} A &= \begin{bmatrix} 0.537523 & 0 & 0 \\ 0 & 0.664209 & 0 \\ 0 & 0 & 0.235018 \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} 0.104104 & 0.022370 & 0.002312 \\ 0.229039 & 0.464932 & 0.105063 \\ 0.155910 & 0.182631 & 0.237292 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.055959 & 0.012025 & 0.001243 \\ 0.152130 & 0.308812 & 0.069784 \\ 0.036642 & 0.042922 & 0.055768 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(i) $\bar{M} A \times$ 逆行列係数 (B) を求める。

$$\begin{aligned} \bar{M} A B &= \begin{bmatrix} 0.055959 & 0.012025 & 0.001243 \\ 0.152130 & 0.308812 & 0.069784 \\ 0.036642 & 0.042922 & 0.055768 \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} 1.051893 & 0.013218 & 0.001944 \\ 0.103010 & 1.194814 & 0.051635 \\ 0.170866 & 0.205875 & 1.230880 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.060313 & 0.015363 & 0.002259 \\ 0.203758 & 0.385351 & 0.102137 \\ 0.052493 & 0.063249 & 0.070931 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(ii) $\bar{M} A B$ の列和を求める。

$$\begin{aligned} i(\bar{M} A B) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} 0.060313 & 0.015363 & 0.002259 \\ 0.203758 & 0.385351 & 0.102137 \\ 0.052493 & 0.063249 & 0.070931 \end{bmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.316565 & 0.463962 & 0.175327 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(iii) 計算結果をまとめる。

表5-23 輸移出に係る輸移入準逆行列係数及び総合輸移入係数

$\bar{M} A B$	第1次産業	第2次産業	第3次産業
第1次産業	0.060313	0.015363	0.002259
第2次産業	0.203758	0.385351	0.102137
第3次産業	0.052493	0.063249	0.070931
総合輸移入係数	0.316565	0.463962	0.175327

<消費及び投資による総合輸移入係数の求め方>

(7) 輸移出に係る準逆行行列係数 $(\bar{M}AB)$ × 県内自給率行列 $(I-\bar{M})$ を求める。

$$\begin{aligned} \bar{M}AB(I-\bar{M}) &= \begin{bmatrix} 0.060313 & 0.015363 & 0.002259 \\ 0.203758 & 0.385351 & 0.102137 \\ 0.052493 & 0.063249 & 0.070931 \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} 0.462477 & 0 & 0 \\ 0 & 0.335791 & 0 \\ 0 & 0 & 0.764982 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.027893 & 0.005159 & 0.001728 \\ 0.094233 & 0.129397 & 0.078133 \\ 0.024277 & 0.021238 & 0.054261 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(4) $\bar{M}AB(I-\bar{M}) + \bar{M}$ を求める。

$$\begin{aligned} \bar{M}AB(I-\bar{M}) + \bar{M} &= \begin{bmatrix} 0.027893 & 0.005159 & 0.001728 \\ 0.094233 & 0.129397 & 0.078133 \\ 0.024277 & 0.021238 & 0.054261 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0.537523 & 0 & 0 \\ 0 & 0.664209 & 0 \\ 0 & 0 & 0.235018 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.565417 & 0.005159 & 0.001728 \\ 0.094233 & 0.793606 & 0.078133 \\ 0.024277 & 0.021238 & 0.289279 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(7) $\bar{M}AB(I-\bar{M}) + \bar{M}$ の列和を求める。

$$\begin{aligned} [\bar{M}AB(I-\bar{M}) + \bar{M}] &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} 0.565417 & 0.005159 & 0.001728 \\ 0.094233 & 0.793606 & 0.078133 \\ 0.024277 & 0.021238 & 0.289279 \end{bmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.683927 & 0.820003 & 0.369140 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(7) 計算結果をまとめる。

表5-24 県内最終需要に係る輸移入準逆行行列係数及び総合輸移入係数

$\bar{M}AB(I-\bar{M}) + \bar{M}$	第1次産業	第2次産業	第3次産業
第1次産業	0.565417	0.005159	0.001728
第2次産業	0.094233	0.793606	0.078133
第3次産業	0.024277	0.021238	0.289279
総合輸移入係数	0.683927	0.820003	0.369140

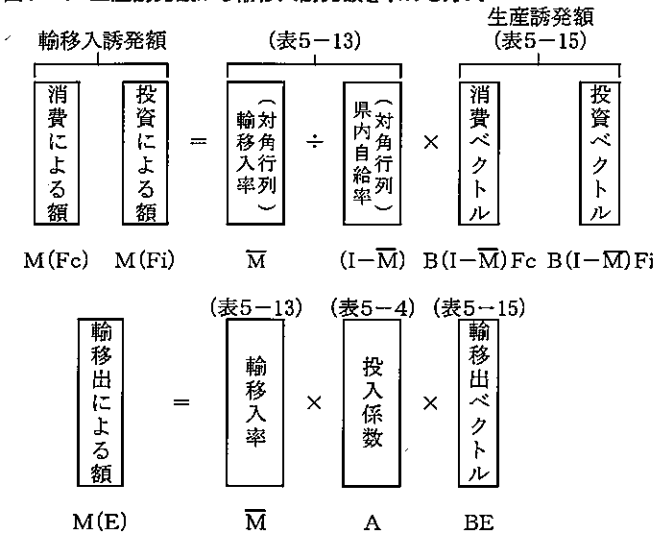
表5-23及び表5-24をみると、いずれも第2次産業の輸移出及び県内最終需要が1単位増加したときが最も輸移入誘発効果が大きい。

イ. 輸移入誘発額

輸移入誘発額も、粗付加価値誘発と同様、生産誘発額から求める方式(図5-5)と最終需要から求める方式(図5-6)の2通りの求め方がある。

また、これを各産業別に合計したものは、各産業の輸移入額に等しくなる。

図5-5 生産誘発額から輸移入誘発額を求める方式



<最終需要項目別輸移入誘発額の求め方>

ここでは、表5-1、表5-23及び表5-24を用いて図5-6の方式により輸移入誘発額を求めることにする。

(7) 消費による輸移入誘発額を求める。

$$\begin{aligned} [\bar{M}AB(I-\bar{M}) + \bar{M}] \cdot Fc &= \begin{matrix} \text{(表5-24)} \\ \begin{bmatrix} 0.565417 & 0.005159 & 0.001728 \\ 0.094233 & 0.793606 & 0.078133 \\ 0.024277 & 0.021238 & 0.289279 \end{bmatrix} \end{matrix} \times \begin{matrix} \text{(表5-1)} \\ \begin{bmatrix} 792 \\ 12,712 \\ 74,848 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{bmatrix} 643 \\ 16,011 \\ 21,941 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(4) 投資による輸移入誘発額を求める。

$$\begin{aligned} [\bar{M}AB(I-\bar{M}) + \bar{M}] \cdot Fi &= \begin{matrix} \text{(表5-24)} \\ \begin{bmatrix} 0.565417 & 0.005159 & 0.001728 \\ 0.094233 & 0.793606 & 0.078133 \\ 0.024277 & 0.021238 & 0.289279 \end{bmatrix} \end{matrix} \times \begin{matrix} \text{(表5-1)} \\ \begin{bmatrix} 36 \\ 20,139 \\ 5,102 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{bmatrix} 133 \\ 16,385 \\ 1,905 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(7) 輸移出による輸移入誘発額を求める。

$$\begin{aligned} \bar{M}AB \cdot E &= \begin{matrix} \text{(表5-23)} \\ \begin{bmatrix} 0.060313 & 0.015363 & 0.002259 \\ 0.203758 & 0.385351 & 0.102137 \\ 0.052493 & 0.063249 & 0.070931 \end{bmatrix} \end{matrix} \times \begin{matrix} \text{(表5-1)} \\ \begin{bmatrix} 2,666 \\ 100,339 \\ 9,201 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1,723 \\ 40,148 \\ 7,139 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(7) 計算結果をまとめる。

表5-25 最終需要項目別輸移入誘発額 (単位:億円)

	消費	投資	輸移出	合計
第1次産業	643	133	1,723	2,499
第2次産業	16,011	16,385	40,148	72,544
第3次産業	21,941	1,905	7,139	30,984
合計	38,595	18,422	49,010	106,027

輸移入額と一致する

(注) 四捨五入の関係で内訳は必ずしも合計と一致しない。

この表をみると、輸移出による輸移入誘発額が4兆9010億円で最も大きい。

また、産業別にみると、第2次産業が7兆2544億円で最も大きく、その内訳は、輸移出により4兆148億円、投資により1兆6385億円、消費により1兆6011億円がそれぞれ誘発されているのがわかる。

ウ. 輸移入誘発係数

最終需要項目別輸移入誘発額(表5-25)をそれぞれ対応する最終需要の合計額(表5-1の最終需要の列計)で除すことにより求められ、項目別最終需要1単位が各産業の輸移入をどれだけ誘発するかを示している。

<計算方法>

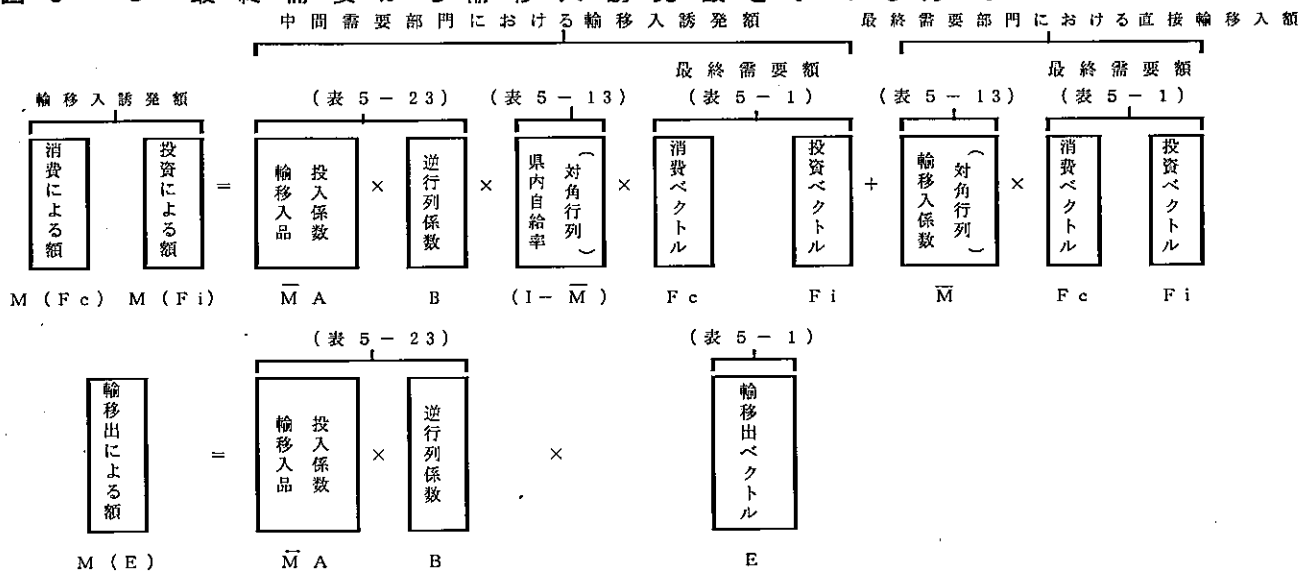
$$\text{輸移入誘発係数} = \frac{\text{最終需要項目別輸移入誘発額}}{\text{最終需要項目別合計(列計)}}$$

表5-26 最終需要項目別輸移入誘発係数

	消費	投資	輸移出	平均
第1次産業	0.007273	0.005264	0.015356	0.011064
第2次産業	0.181220	0.648196	0.357813	0.321228
第3次産業	0.248338	0.075345	0.063623	0.137200
合計	0.436832	0.728805	0.436792	0.469492

この表をみると、最終需要合計では、1億円の最終需要が生じると、4695万円の輸移入が誘発されることを示している。

図5-6 最終需要から輸移入誘発額を求める方式



また、最終需要項目別に見ると、投資の輸移入誘発効果が最も大きく、1億円の投資があった場合、7288万円の輸移入が誘発されることを示している。

なお、ここで、表5-21と表5-26の関係をみると、(粗付加価値誘発係数計) + (輸移入誘発係数計) = 1となっているのがわかる。最終需要合計を例にとると、0.530508 + 0.469492 = 1となっており、最終需要項目別にみた場合も同じである。(ただし、四捨五入の関係で若干の誤差がある。)これは、(最終需要合計) - (輸移入合計) = (粗付加価値合計) という、最終需要と粗付加価値のいわゆる2面等価の原則から推察できるわけであり、すなわち、最終需要1単位当たり誘発される粗付加価値と輸移入の和は、最終需要と同じ1単位になることを意味している。

エ. 輸移入誘発依存度

各最終需要により誘発された産業別の輸移入誘発額を輸移入誘発額合計(行計)で除すことにより求められる。これにより、各産業の輸移入額がどの最終需要項目によりどれくらい誘発されているかがわかる。

<計算方法>

$$\text{輸移入誘発依存度} = \frac{\text{最終需要項目別輸移入誘発額}}{\text{産業別輸移入誘発額合計}}$$

表5-27 最終需要項目別輸移入誘発依存度

	消費	投資	輸移出	合計
第1次産業	0.257177	0.053253	0.689571	1.000000
第2次産業	0.220708	0.225857	0.553435	1.000000
第3次産業	0.708131	0.061467	0.230402	1.000000
平均	0.364008	0.173749	0.462243	1.000000

この表をみると、第1次産業と第2次産業の輸移入は、輸移出により最も大きく誘発されており、第3次産業の輸移入は、消費により最も大きく誘発されているのがわかる。

3 産業連関表と県民経済計算の関係

産業連関表と県民経済計算は、双方とも一定期間における財貨・サービスの流れを把握するという点で共通点を持ち、かつ、経済活動の主体を企業、家計、政府などに大別する点でも同じである。

しかし、県民経済計算は、1県の経済全体を1つの単位であるかのように取り扱うマクロの概念であるのに対し、産業連関表は、1県の経済を数多くの部門に分割し、県民経済計算では考慮していない中間生産物の取引を、部門別に詳細にとらえることに重点を置いている。さらに、消費、投資、輸移出入等の最終需要部門や、雇用者所得、営業余剰等の粗付加価値部門も、その内容を部門別に分割して扱っている。

このように、両者の間には、基本的な性格の相違があり、この結果、産業連関表では、分析目的である産業間の生産技術的な結合関係を明らかにする必要から、各部門間の取引は、財貨及びサービスに限定され、振替的取引並びに金融的取引は、いっさい表から除外される。また、各産業の生産は、純生産又は付加価値だけではなく、原材料等として使用した中間投入額も含めたグロスの生産額として表される。

つまり、県民経済計算は、生産活動により生じた所得の分配面並びに支出面の勘定形式であるのに対し、産業連関表は、財貨・サービスの中間取引と県民経済計算を同時に含んだ勘定形式とみることができる。

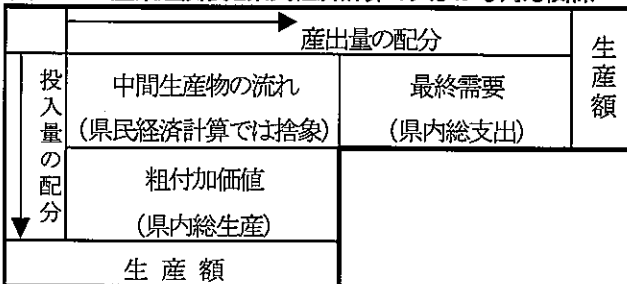
ところで、もともと県民経済計算の計数と産業連関表の外生部門（粗付加価値及び最終需要）の計数とは、同じ県経済の流れをとらえたものであり、本来一致すべきものであるが、両者にはそれぞれ独自の概念規定があり、そのままの形では、完全には一致しない。大まかな対応関係は、図5-7のとおりであるが、主な相違点は次のとおりである。

- ① 調査・推計の対象となる期間について、県民経済計算は会計年度であるが、産業連関表では暦年である。
- ② 調査・推計の単位について、県民経済計算は事業所ベースであるが、産業連関表では生産活動ベース（アクティビティベース）である。（商品ベースに近い。）
- ③ 調査・推計の対象となる地域について、県民経済計算は属地主義（生産面）と属人主義（分配面、支出面）であるが、産業連関表では属地主義である。
- ④ 家計外消費支出の取扱いについて、県民経済計算は中間取引の一部として内生部門に計上しているが、産業連関表では最終需要及び粗付加価値の一部として外生部門に計上している。

また、産業連関表と県民経済計算では以下のとおり部門名称が異なっている。

産業連関表	県民経済計算
(粗付加価値) ・家計外消費支出 ・雇用者所得 ・営業余剰 ・資本減耗引当 ・間接税 ・(控除) 補助金	(県内総生産) ・雇用者報酬 ・営業余剰・混合所得 ・固定資本減耗 ・生産・輸入品に課される税 ・(控除) 補助金
(最終需要) ・家計外消費支出 ・民間消費支出 ・一般政府消費支出 ・県内総固定資本形成 ・在庫純増 ・輸移出 ・(控除) 輸移入	(県内総支出) ・民間最終消費支出 ・一般政府最終消費支出 ・総固定資本形成 ・在庫品増加 ・財貨・サービスの移出 ・(控除) 財貨・サービスの移入

図5-7 産業連関表と県民経済計算の大まかな対応関係



(注) () 内が県民経済計算にほぼ対応する部分。

4 「行列」の意味と計算方法

(1) 行列の定義と用語

次のように数を長方形に並べたものを、行列（マトリックス）という。行列を表すには、長方形に並べた数の両側に（ ）を付ける。また、この行列を形成している一つ一つの数を、この行列の要素という。

行列の長方形に並んでいる数のヨコの並びを行、タテの並びを列といい、それぞれ上から順に第1行、第2行、左から順に第1列、第2列という。

4	2	8	6	第1行
1	5	3	4	第2行
2	9	0	5	第3行
⋮	⋮	⋮	⋮		
⋮	⋮	⋮	⋮		
	第	第	第	第	
	1	2	3	4	
	列	列	列	列	

上の例は要素がすべて定数の行列であるが、行列の要素は定数とは限らず、変数であってもよい。

ある行列の行及び列の数がそれぞれm及びnであるとき、この行列を (m×n) 型行列あるいは (m, n) 型行列という。したがって、上に示した行列は (3×4) 型あるいは (3, 4) 型である。

行列を1個の文字で表すことがある。その場合は、普通アルファベットの大文字を用い、その要素は、次のように表す。

例えば、行列Aの第i行、第j列の位置にある要素は、Aの小文字aを用いて、

a_{ij} と表す。そして、これを行列Aの (i, j) 要素という。

したがって、この行列Aが (m×n) 型ならば、

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

となる。また、行列Aを (a_{ij}) と表すこともある。

(2) 特殊な形の行列

行列はその形によっていろいろな名称が付けられているが、次に特に重要な正方行列及びベクトルについて説明する。

ア. 正方行列

行及び列の数が等しい行列、すなわち要素が正方形に並んでいる行列を、正方行列という。

正方行列には、その形から、次のような特殊な名称で呼ばれているものがある。

(ア) 対角行列

次のように左上より右下にいたる対角線上の要素以外の他の要素がすべて0のものを、対角行列という。なお、対角線上の要素に0のものがあったりもかまわない。

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

(イ) 単位行列

対角行列で、対角線上の要素がすべて1のものを、単位行列という。この行列は、通常Iで表される。単位行列は、通常の数1に相当し、他の行列に掛けてもその行列は変化しない。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

イ. ベクトル

ただ1行あるいは1列よりなる行列を、それぞれ行ベクトル、列ベクトルという。また、すべての要素が1のベクトルを、特に単位行ベクトル、単位列ベクトルという。

行ベクトル (4 2 8 6)

列ベクトル $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

単位行ベクトル (1 1 1 1)

単位列ベクトル $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(3) 行列の演算

ア. 加減算

行列の加減算は、行及び列の数がそれぞれ等しい行列についてのみ行われる。

行列Aに別の行列Bを加えるとは、この2つの行列の (i, j) 要素の和、すなわち $(a_{ij} + b_{ij})$ を新たに (i, j) 要素とする行列を作ることを行い、これをA+Bと表す。

同様に、行列Aから行列Bを引くとは、この2つの行列の (i, j) 要素の差、すなわち $(a_{ij} - b_{ij})$ を新たに (i, j) 要素とする行列を作ることを行い、これをA-Bと表す。

例えば、A及びBを

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 5 & 4 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 8 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

とすると、A+B及びA-Bは次のようになる。

$$A + B = \begin{bmatrix} 3+2 & 9+5 \\ 5+1 & 4+8 \\ 7+4 & 0+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 14 \\ 6 & 12 \\ 11 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 3-2 & 9-5 \\ 5-1 & 4-8 \\ 7-4 & 0-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & \Delta 4 \\ 3 & \Delta 6 \end{bmatrix}$$

イ. 乗算

行列の掛け算は、掛けられる方(左側)の行列の列数と、掛ける方(右側)の行列の行数が等しいことが必要である。ここで、ある行列Aに別の行列Bを掛けることとし、Aを(l, m)型行列、Bを(m, n)型行列とする。

さて、行列Aに行列Bを掛けたら、次の数値

$$\sum_{s=1}^m a_{is} b_{sj}$$

をその(i, j)要素とする行列を作ることを行い、これをABと表す。ABは(l, n)型行列になる。

例えば、A及びBを

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

とすると、行列Aの列数(=2)と行列Bの行数(=2)は等しいので、掛け算可能であり、

$$AB = \begin{bmatrix} 4 \times 2 + 8 \times 0 & 4 \times 5 + 8 \times 1 \\ 2 \times 2 + 1 \times 0 & 2 \times 5 + 1 \times 1 \\ 3 \times 2 + 6 \times 0 & 3 \times 5 + 6 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 28 \\ 4 & 11 \\ 6 & 21 \end{bmatrix}$$

と(3, 2)型の行列になる。

A及びBがともに同じ型の正方行列であるとき、ABもBAも型の等しい正方行列となるが、結果は必ずしも等しくない。

例えば、A及びBを

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

とすると、AB及びBAはそれぞれ次のようになる。

$$AB = \begin{bmatrix} 8 & 28 \\ 4 & 11 \end{bmatrix} \quad BA = \begin{bmatrix} 18 & 21 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

行列の掛け算が、通常の数の掛け算と最も異なる点は、この交換の法則が成り立たないことである。したがって、掛け算を行う場合は、掛ける順序に注意する必要がある。

一方、Aを任意の正方行列、Iを単位行列とすると、次の式が常に成り立つ。

$$AI = A \quad IA = A$$

もちろん、この単位行列Iは、掛け算が行えるように、行数及び列数を定めておく必要がある。

なお、行列の掛け算では、結合の法則及び分配の法則が成り立つ。すなわち、行列A, B, C、に関して、次の式が成り立つ。

$$\begin{array}{ll} \text{結合の法則} & (AB)C = A(BC) \\ \text{分配の法則} & A(B \pm C) = AB \pm AC \\ & (B \pm C)A = BA \pm CA \end{array}$$

ただし、これら式中の行列A, B, Cは、それぞれの式において演算ができるような型のものでなければならない。

ウ. 行列と数との乗算

行列と数との間には、掛け算だけが考えられる。ある行列をある数で割るとは、その数の逆数を掛けるということである。これは、掛け算として行うことができる。

ある行列Aとある数Kとの掛け算とは、行列Aの各要素にKを掛けることをいい、KA又はAKと表す。(数は前から掛けても後ろから掛けても同じである。)

したがって、

$$KA = K(a_{ij}) = (Ka_{ij}) \text{ となる。}$$

例えば、A及びKを

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 8 & 6 \\ 1 & 5 & 3 & 4 \\ 2 & 9 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad K = 2$$

とすると、KAは次のようになる。

$$KA = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 16 & 12 \\ 2 & 10 & 6 & 8 \\ 4 & 18 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

エ. 逆行列

正方行列Aに対して、次の式を満たす A^{-1} が存在するとする。

$$AA^{-1} = I$$

このとき、 A^{-1} をAの逆行列という。また、 $A^{-1}A = I$ が成り立つ。

ここで、(2, 2)型正方行列の逆行列の求め方を示すことにする。

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

とすると、 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ のとき、

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & \Delta a_{12} \\ \Delta a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

となる。

例えば、

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

とすると、 A^{-1} は次のようになる。

$$A^{-1} = \frac{1}{2 \times 3 - 1 \times 5} \begin{bmatrix} 3 & \Delta 1 \\ \Delta 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & \Delta 1 \\ \Delta 5 & 2 \end{bmatrix}$$

検算すると、

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & \Delta 1 \\ \Delta 5 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \times 3 + 1 \times (\Delta 5) & 2 \times (\Delta 1) + 1 \times 2 \\ 5 \times 3 + 3 \times (\Delta 5) & 5 \times (\Delta 1) + 3 \times 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \text{ となる。} \end{aligned}$$

ただし、この行列の求め方は、(2, 2)型行列のときに限り、行列数の多い行列には適用できない。

別の計算方法によって、高次の行列の逆行列を求めることはできるが、手計算では、時間がかかりすぎて実用的ではない。

そのため、実際の計算には表計算ソフトを使うのが無難である。

(4) 表計算ソフトによる行列の演算

表計算ソフトによる行列の演算ということで、「Microsoft Excel」を使用して行列の乗算（掛け算）と逆行列係数を計算してみよう。

ア. 行列乗算

2つの行列の掛け算を計算するにはMMULT関数を使用する。

計算例		列番号		
行列A		A	B	
行番号	1	4	6	
	2	2	7	
	3	5	3	

行列B		A	B	C
6	8	2	4	
7	3	10	1	

計算結果

行列AB		A	B	C
11	50	68	22	
12	37	74	15	
13	49	40	23	

計算手順

- ① 計算結果を出力する範囲を指定する。
計算例 セルA11:C13をドラッグする。
- ② 計算式を入力する。(入力式: =MMULT(行列Aの範囲, 行列Bの範囲)
計算例 ①で指定した範囲のまま,
=MMULT(A1:B3, A6:C7)と入力する。
- ③ [Shift] キーと [Ctrl] キーを押しながら,
[Enter] キーを押す。
- ④ 計算結果が出力される。

イ. 逆行列

逆行列を計算するにはMINVERSE関数を使用する。

計算例		列番号	
行列A		A	B
行番号	1	5	65
	2	10	15

計算結果

行列A ⁻¹		A	B
6	-0.02609	0.11304	
7	0.01739	-0.00870	

計算手順

- ① 計算結果を出力する範囲を指定する。
計算例 セルA6:B7をドラッグする。
- ② 計算式を入力する。(入力式: =MINVERSE(行列Aの範囲)
計算例 ①で指定した範囲のまま,
=MINVERSE(A1:B2)と入力する。
- ③ [Shift] キーと [Ctrl] キーを押しながら,
[Enter] キーを押す。
- ④ 計算結果が出力される。

