第５章　産業連関表の見方・使い方

第５章　産業連関表の見方・使い方

1　産業連関表の見方

すべての産業は，その生産物を他の産業の中間需要として，又は家計や政府などの最終需要として販売し，また一方では，生産のために必要な原材料を他の産業から購入している。このように，各産業間及び産業と家計や政府などの間には，絶えず財貨やサービスの取引が行われている。各産業は，中間需要と中間投入を通じて，産業相互間の依存関係によりその生産活動を行っているといえる。

産業連関表とは，一定の期間（通常１年間）に一定の地域内で行われた生産活動によって生じた，産業間及び産業と最終需要（家計消費，一般政府消費等）間の財貨・サービスの取引を一つの表にまとめたものである。この表の中核をなす部分が産業間の取引のつながりを表していることから，産業連関表と呼ばれる。

(1)　内生部門と外生部門

産業連関表の構造を簡単に図示したものが図５－１である。

産業連関表では，生産活動を営む産業部門とそれ以外の非産業部門とに分けている。図５－１で示すように，産業と産業のクロスする部門を内生部門と呼び，最終需要及び粗付加価値を外生部門と呼んでいる。また，内生部門をタテ方向にみて中間投入，ヨコ方向にみて中間需要と呼び，産業間取引の実態を明らかにしている。この中間取引部分である内生部門の数をもってその表のサイズ（行×列）を表す。

(2)　販路構成と費用構成

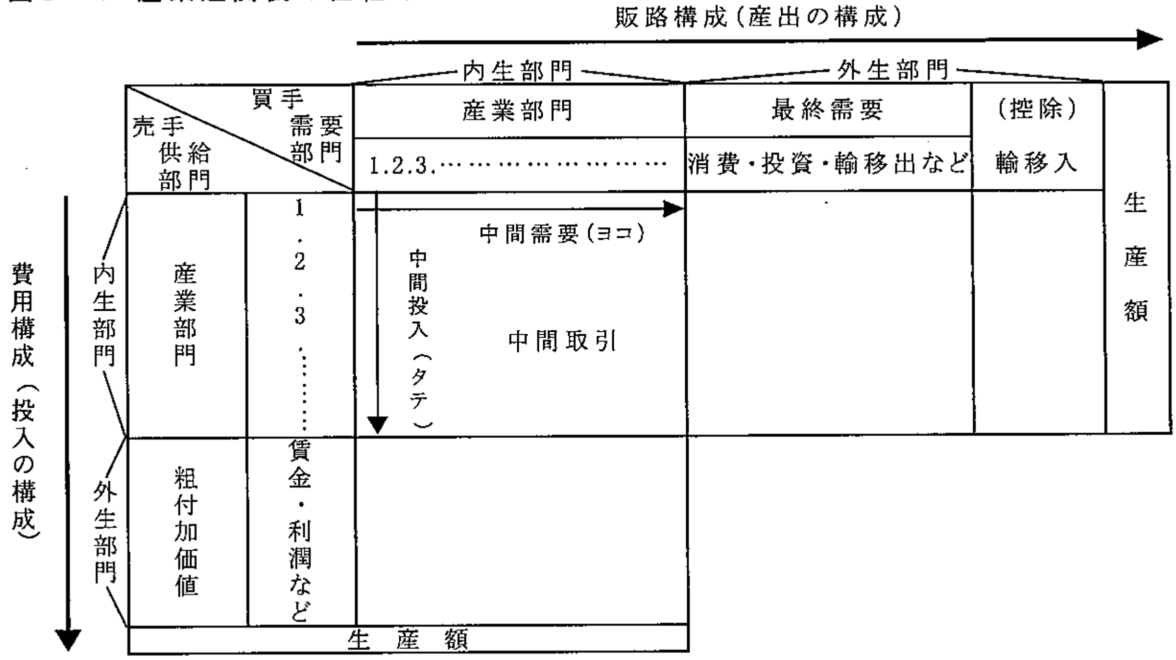
次に，産業連関表の読み方についてみると，二つの側面からこれを読むことができる。

一つは，表をヨコ方向の「行」にそって読むことにより，表側の「売手」側にある各産業で生産したそれぞれの生産物がどの部門へどれだけ売られたかという販路構成がわかる。ただし，県内の各産業の生産物の販売のみでは，県内の需要を満たすことができないため，不足分を県外から輸移入することになる。したがって，表の行方向の数字には，県内産品のみでなく輸移入品も含まれる。

もう一つは，同じ表をタテ方向の「列」にそって読むことにより，表頭の「買手」側にある各産業が，生産物をつくるために，原材料等をどの部門からどれだけ仕入れたか，また，生産活動により生み出された粗付加価値（雇用者所得や営業余剰など）はどれだけかという費用構成がわかる。

このように，表をヨコ方向にみていくと販路構成がわかり，タテ方向にみていくと費用構成がわかるというのが，産業連関表の重要な特色である。ところで，費用構成とは，ある産業がその生産物をつくるために，原材料や労働などの生産要素を投入（Input）した構成であり，また，販路構成とは，そのようにして産出（Output）された生産物の配分構成にほかならない。産業連関表が，別名「投入産出表」，あるいは両者の頭文字をとって「I－O表」の名で呼ばれるのはこのためであり，その呼び名は，生産活動に即したものといえる。

図５－１　産業連関表の仕組み



(3) 需給バランス

さらに，産業連関表では，各産業部門についてタテ方向の買手（需要部門）の計とヨコ方向の売手（供給部門）の計にそれぞれ生産額を設け，投入と産出を一致させている点にもう一つの特色があり，この需給バランスから導き出される均衡産出高モデルの応用が，産業連関分析の基本である。

(4) 平成７年茨城県産業連関表

ここで，産業連関表を具体的な計数によりみることにする。

表５－１は，今回作成した表を 3 部門に統合したものである。すなわち，内生部門は，第 1 次産業，第 2 次産業，第 3 次産業の 3 部門からなっており，外生部門の最終需要も簡略化して，消費，投資，輸移出の 3 部門にまとめて示している。そして，内生部門の中間需要と最終需要の合計から輸移入を差し引くことにより，県内での生産額が得られる。

また，粗付加価値部門は，経済体系の中でいわば再生産されない労働その他の用役を提供する部門で，生産によって新たに付け加えられる付加価値の形成に寄与し，その価値分配にあずかる部門である。表では，粗付加価値の合計のみを記しているが，ここには雇用者所得，営業余剰等が含まれている。

例えば，第 1 次産業をタテ方向にみると，平成７年 1 年間に，自部門から 644 億円，第 2 次産業から 1008 億円，第 3 次産業から 820 億円の原材料等を購入しており，これら原材料等の購入総額は「中間投入計」欄に示すように 2472 億円である。これらの中間投入によって第 1 次産業は 5767 億円の生産をあげたことになる。この生産額から中間投入額を差し引いたものが粗付加価値額であり，生産活動の結果 3295 億円の粗付加価値を生み出したことになる。

次に，第 1 次産業をヨコ方向にみると，平成７年 1 年間に，第 1 次産業は新たに生産した財貨・サービス 5767 億円を中間需要や最終需要として販売している。しかし，中間需要と最終需要を合わせた需要合計は 8123 億円であり，県内生産額との差額 2357 億円は県外からの輸移入によって賄われている。このことは，第 1 次産業における「需要合計」欄の 8123 億円の中に，輸移入分として 2357 億円が含まれていることを意味する（ただし，この場合，産業連関表では，輸移出品は県内産品に限るということを前提としているため，輸移出には輸移入分は含まれていない。）。

このように，表の投入と産出の合計は一致しており，表全体として需要・供給がバランスしていることがわかる。

表５－１　平成７年茨城県産業連関表（３部門）

（単位：億円）

		中間需要				最終需要				需要合計	（控除）	県内生産額
		第1次産業	第2次産業	第3次産業	中間需要計	消費	投資	輸移出	最終需要計		輸移入	
中間投入	第1次産業	644	3,423	220	4,286	844	74	2,919	3,837	8,123	−2,357	5,767
	第2次産業	1,008	56,332	11,052	68,392	14,220	26,633	100,143	140,995	209,388	−70,188	139,200
	第3次産業	820	26,440	22,465	49,725	61,239	4,204	9,811	75,253	124,978	−23,638	101,340
	中間投入計	2,472	86,195	33,737	122,404	76,302	30,911	112,872	220,085	342,489	−96,182	246,306
粗付加価値		3,295	53,005	67,603	123,903							
県内生産額		5,767	139,200	101,340	246,306							

（注）1．四捨五入の関係で内訳は必ずしも合計と一致しない。
2．事務用品，分類不明は第2次産業に算入した。

(3) 影響力係数と感応度係数

表5－11と表5－12は，表5－1の産業連関表（3部門）より作成した（I－A）$^{-1}$型と［I－（I－$\overline{M}$）A］$^{-1}$型の逆行列係数表である。この2つを比べると，（I－A）$^{-1}$型は，輸移入を内生的に取り扱っていないので，最終需要によって誘発される中間需要は，すべて県内産業で賄えるという形になっており，輸移入を内生的に取り扱っている［I－（I－$\overline{M}$）A］$^{-1}$型よりも波及効果が過大になり，各産業部門の列和はすべて［I－（I－$\overline{M}$）A］$^{-1}$型よりも大きくなっている。

表5－11 逆行列係数表（I－A）$^{-1}$型

	第1次産業	第2次産業	第3次産業	行和	感応度係数
第1次産業	1.137128	0.050225	0.010210	1.197563	0.629696
第2次産業	0.389392	1.775594	0.249890	2.414875	1.269775
第3次産業	0.302841	0.442499	1.347660	2.093000	1.100529
列和	1.829361	2.268318	1.607760	5.705439	－
影響力係数	0.961904	1.192714	0.845383	－	1.901813

表5－12 逆行列係数表［I－（I－$\overline{M}$）A）$^{-1}$］型

	第1次産業	第2次産業	第3次産業	行和	感応度係数
第1次産業	1.066462	0.017191	0.002352	1.086005	0.811916
第2次産業	0.085311	1.180380	0.055991	1.321681	0.988112
第3次産業	0.161973	0.218654	1.224435	1.605062	1.199972
列和	1.313746	1.416225	1.282777	4.012748	－
影響力係数	0.982179	1.058794	0.959027	－	1.337583

そこで，より現実の経済活動を反映している［I－（I－$\overline{M}$）A］$^{-1}$型逆行列係数により，波及効果6の実態をみてみることにする。表5－12において，例えば，第1次産業に1億円の輸移出が発生すると，第1次産業は直接分の1億円のほかに，間接的な波及効果により665万円分の生産をしなければならず，同様に，第2次産業には853万円，第3次産業には1620万円の生産誘発額が生じ，産業全体では，1億3137万円の生産増が生じる。

このように，逆行列係数の列和は，その列部門の産業に1単位の最終需要が生じた場合に，産業全体に誘発される生産量を示している。したがって，部門別列和を全部門の列和の平均で除すことにより，どの列部門に対する単位当たりの最終需要が産業全体に与える影響の度合が強いかを知ることができる。これが影響力係数であり，次の式で表される。

$$\text{影響力係数} = \frac{\text{逆行列係数の各部門の列和}}{\text{逆行列係数の列和の平均値}}$$

例えば，第1次産業の影響力係数は，次のように求められる。

$$\text{第1次産業の影響力係数} = \frac{1.313746}{(1.313746+1.416225+1.282777)\div 3} = 0.982179$$

この係数が1より大きい部門は，影響力が産業平均より大きいことになる。

また，逆行列係数表をヨコ方向にみると，ある行部門の行和は，各列部門に最終需要が1単位ずつ生じたとき，その行部門が直接，間接に供給すべき生産量を示している。したがって，部門別行和を全部門の行和の平均で除すことにより，各列部門に1単位ずつ最終需要が生じた場合に，どの行部門がどれくらい影響を受けるか，その受ける影響の度合を知ることができる。これが感応度係数であり，次の式で表される。

$$\text{感応度係数} = \frac{\text{逆行列係数の各部門の行和}}{\text{逆行列係数の行和の平均値}}$$

例えば，第1次産業の影響力係数は，次のように求められる。

$$\text{第1次産業の感応度係数} = \frac{1.086005}{(1.086005+1.321681+1.605062)\div 3} = 0.811916$$

この係数が1より大きい部門は，感応度が産業平均より大きいことになる。

一般に，影響力係数は，各部門からの直接，間接の原材料投入率が高く，かつ，原材料となる部門の輸移入率が低い部門で大きく，感応度係数は，需要部門が多岐にわたり，中間需要率が高く，かつ，輸移入率が低い部門で大きくなる。

まり，産業連関表では，輸移出品は，県内生産物の県外出荷額が計上され，財の単なる通過取引は計上されないので，輸移出品の中に一定割合で輸移入品が含まれているという仮定は誤っている。

ウ．$[I-(I-\overline{M})A]^{-1}[(I-\overline{M})Fd+E]$型

このモデル式は，最終需要を県内最終需要と輸移出に分けて取り扱うことにし，さらに，輸移入係数を生産額に対する輸移入額の割合から，需要合計から輸移出分を除いた県内需要に対する割合に改めることにより，輸移出の中にも輸移入品が含まれるという $(I-A+\hat{M})^{-1}$型モデルの欠点を取り除いたものである。

2つの型の相違点は，次のとおりである。

	最終需要の取扱い	輸移入係数
$(I-A+\hat{M})^{-1}$型	最終需要1本で取り扱う(輸移出に輸移入品が含まれる)	$\hat{M}=\dfrac{輸移入品額}{県内生産額}$ (県内生産額に比例)
$[I-(I-\overline{M})A]^{-1}$型	県内最終需要(消費・投資)と輸移出に分けて取り扱う	$\overline{M}=\dfrac{輸移入品額}{県内生産額}$ (県内需要額に比例)

このモデルでは，

$$輸移入係数=\frac{輸移入額}{中間需要+輸移出を除く最終需要}$$

と定義され，第i部門の輸移入係数は，

$$m_i=\frac{M_i}{(AX+Fd)_i} \quad \cdots\cdots⑤$$

となる。この⑤式の分子は第i製品の輸移入額，分母は第i製品に対する県内需要である。m_iを対角化した行列を$\overline{M}$とすると，輸移入は，

$$M=\overline{M}(AX+Fd) \quad \cdots\cdots⑥$$

と表すことができる。

表5－9は，最終需要を県内最終需要（消費及び投資）と輸移出に分けて表した産業連関表である。

表5－9 産業連関表(仮設例4)

	産業1	産業2	県内最終需要	輸移出	輸移入	県内生産額
産業1	$a_{11}X_1$	$a_{12}X_2$	Fd_1	E_1	$\triangle M_1$	X_1
産業2	$a_{21}X_2$	$a_{22}X_2$	Fd_2	E_2	$\triangle M_2$	X_2
粗付加価値	V_1	V_2				
県内生産額	X_1	X_2				

この表を産出バランス式で表すと，

$$\underbrace{AX}_{\text{輸移入品を含む県内中間需要額}}+\underbrace{Fd}_{\text{輸移入品を含む県内最終需要額}}+\underbrace{E}_{\text{県内産品のみの輸移出額}}-\underbrace{M}_{\text{部門別輸移入額}}=\underbrace{X}_{\text{部門別県内生産額}}$$

となり，この式に⑥式を代入すると，

$$AX+Fd+E-\overline{M}(AX+Fd)=X$$

となり，この式をXについて整理すると，県内での生産水準を示す

$$X=[I-(I-\overline{M})A]^{-1}[(I-\overline{M})Fd+E] \quad \cdots\cdots⑦$$

が得られる。

なお，この⑦式においても，中間需要と県内最終需要の各産業部門で，輸移入品の消費割合は一定であるという仮定に基づいている。ここで，$(I-\overline{M})$は，県内需要に対する輸移入品消費割合を除いた県内自給率，$(I-\overline{M})A$は，輸移入品消費率が同一と仮定した場合の各産業部門での県内産品投入係数，$(I-\overline{M})Fd$は，同じ仮定のもとでの県内産品に対する県内最終需要である。

これは，このモデルが競争輸移入方式（消費される財貨が県内産品であるか輸移入品であるかを区別せず一括して表示する方式）の産業連関表に基づいて組み立てられている以上やむを得ないことであり，最終需要を県内最終需要と輸移出に分けて取り扱っている点で，$(I-A+\hat{M})^{-1}F$型と比べて，より実態に即したものになっている。

ところで，このような波及効果の輸移入による県外への流出分については，$(I-A)^{-1}$型逆行列係数の列和と$[I-(I-\overline{M})A]^{-1}$型逆行列係数の列和の差を求めることにより明らかになる。表5－10によりこれをみると，例えば，第1次産業に1億円の輸移出が生じた場合の波及効果は1億8294万円であり，1億3137万円が県内自給分，その差額の5156万円が県外流出分である。また，$(I-A)^{-1}$型の列和に対する$[I-(I-\overline{M})A]^{-1}$型の列和の割合を求めたものが県内歩留り率であり，(100－県内歩留り率）が県外流出率である。

県内歩留り率を産業別にみると，第3次産業（79.8%）が最も高く，次いで第1次産業（71.8%），第2次産業（62.4%）の順になっている。

ここで，注意を要する点は，県内歩留り率は，波及効果の大きさを示すものではないという点であり，波及効果の大きさは，逆行列係数の列和でみるべきである。

表5－10　生産波及効果の県内歩留り率と県外流出率

	$(I-A)^{-1}$型 列和 (A)	$[I-(I-\overline{M})A)^{-1}]$型 列和 (B)	県外流出分 (A)－(B)	県内歩留り率 (%) (B)／(A)×100	県外流出率 (%) 100－県内歩留り率
第1次産業	1.829361	1.313746	0.515615	71.8	28.2
第2次産業	2.268318	1.416225	0.852093	62.4	37.6
第3次産業	1.607760	1.282777	0.324983	79.8	20.2

(注)（A）は表5－1，（B）は表5－12より求めた。

(2) 逆行列係数

表５－２の産業連関表のモデルは，簡略化のため，輸移入を含まない単純モデルを例示したが，現実の経済活動は，輸移出入を通じて外部経済と強く結びついている。そこで，実際の産業連関表は，表５－８のモデルのように輸移入が計上されている（ここでは，中間需要を生産額と投入係数を用いて表している。）

最終需要及び最終需要によって誘発される中間需要は，そのすべてを県内の生産活動によって賄われているわけではなく，その一部は県外からの輸移入に依存しており，その分波及効果の県外流出が生じているのである。したがって，輸移入を組み込んだ産業連関表でなければ，正しい経済分析を行うことはできないといえる。ここでは，輸移入の取扱いとそれに対応した逆行列係数の型について述べることにする。

表5－8 産業連関表(仮設例3)

	産業1	産業2	最終需要	輸移入	県内生産額
産業1	$a_{11}X_1$	$a_{12}X_2$	F_1	$\triangle M_1$	X_1
産業2	$a_{21}X_2$	$a_{22}X_2$	F_2	$\triangle M_2$	X_2
粗付加価値	V_1	V_2			
県内生産額	X_1	X_2			

ア　$(I-A)^{-1}(F-M)$ 型

表５－８を行列表示すると，

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \cdots\cdots ①$$

となる。ここで，投入係数の行列をA，最終需要の列ベクトルをF，輸移入の列ベクトルをM，生産額の列ベクトルをXとして，①式を産出バランス式で表すと，次のようになる。

$$\underset{\left[\substack{\text{輸移入品を含む}\\ \text{県内中間需要額}}\right]}{AX} + \underset{\left[\substack{\text{輸移入分を含む}\\ \text{最終需要額}}\right]}{F} - \underset{\left[\substack{\text{部門別}\\ \text{輸移入額}}\right]}{M} = \underset{\left[\substack{\text{部門別}\\ \text{県内生産額}}\right]}{X} \quad \cdots ②$$

この②式は，中間需要と最終需要を加えた需要合計が，県内生産額のみでは賄えず，需要合計から生産額を差し引いた不足分を県外からの輸移入によって満たしているという経済関係を表している。

②式を変形すると，

$(I-A)X=F-M$　（ただし，Ｉは単位行列）

となり，この式に（Ｉ－Ａ）の逆行列 $(I-A)^{-1}$ を左から乗じると，各部門の県内での生産水準

$X=(I-A)^{-1}(F-M)$ ……③

が求められる。

この③式には，最終需要（Ｆ）と輸移入額（Ｍ）がともに外生的に与えられた場合，県内自給分の最終需要（Ｆ－Ｍ）を満たすために必要な県内生産額（Ｘ）が求められることを意味している。

ここで，$(I-A)^{-1}=(I+A+A^2+A^3+\cdots\cdots)$ であり，③式は，最終需要により誘発される中間需要はすべて県内の生産活動で賄えるとみなしているので，求めた生産額は実際よりも過大になってしまう。

また，輸移入は本来，県内での生産活動に大きく依存しており，内生的には決定されるべき性格をもっているが，このモデルでは生産額（Ｘ）が求められないうちに，最終需要とともに輸移入も先決的に与えなければならないという不合理な面がある。

イ．$(I-A+\hat{M})^{-1}F$ 型

このモデル式は，$(I-A)^{-1}(F-M)$ 型の欠点である輸移入を内生的に取り扱っている。

すなわち，輸移入は県内各産業の生産水準に比例して決定されるという仮定に基づいて，輸移入係数（$\hat{M}$）を次のとおり定義する。

$$\text{部門別輸移入係数}=\frac{\text{部門別輸移入額}}{\text{部門別県内生産額}}$$　，つまり，

$m_i=\dfrac{M_i}{X_i}$ であり，これを要素とする対角行列 $\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$

を $\hat{M}$ とすると，輸移入額の列ベクトルMは，$M=\hat{M}X$ となる。

これを②式に代入すると，

$AX+F-\hat{M}X=X$

となり，この式をＸについて整理すると，

$X=(I-A+\hat{M})^{-1}F$ ……④

が求められる。

ここで，$(I-A+\hat{M})^{-1}=[I-(A-\hat{M})]^{-1}=(I+(A-\hat{M})+(A-\hat{M})^2+\cdots\cdots)$ であり，このモデル式においては，最終需要を与えればそれにより誘発される中間需要は県内産業の生産活動によるものに限定される。

しかし，このモデルには次の２つの欠点がある。

第１に，輸移入額を当該部門の生産額で除して輸移入係数を求めており，輸移入品消費比率はすべての消費部門において一定であるという前提に立っており，必ずしも現実の経済の実態と一致していない点である。また，輸移入額が生産額に比例するという前提にも問題があるだろう。現実の経済の活動では，生産水準が上がれば，むしろその品目の県内自給率が上がり，生活水準が下がれば，輸移入率が上がるものと思われるからである。

第２に，このモデル式においては，最終需要（Ｆ）には，県内産品のみでなく輸移入分も含まれており，輸移出についても一定割合で輸移入品が含まれるという点である。つ

って原材料等を投入しなければならず（第 2 次の中間需要の発生），以下このような関係が次々に繰り返されていき，この過程は無限に続くことになる。

このような生産の波及過程を表５－６の投入係数を用いて，農林水産業と製造業の最終需要がそれぞれ 80 億円，120 億円あった場合を前提として計算した結果が表５－７である。この計算方法は，繰り返し計算法と呼ばれる。

表5—7　生産波及の逐次繰り返し累積過程

（単位:億円）

		農林水産業部門	製造業部門	誘発中間需要
直接効果		農林水産業部門に最終需要が80発生する。	製造業部門に最終需要が120発生する。	
間接波及効果	1次波及	農林水産業は最終需要80を生産するため 農林水産業から80×0.1＝8 製造業から　80×0.2＝16 を中間投入する	製造業は最終需要120を生産するため 農林水産業から120×0.25＝30 製造業から　120×0.5 ＝60 を中間投入する	農林水産業 8＋30＝38 製造業 16＋60＝76
	2次波及	農林水産業は中間需要38を生産するため 農林水産業から38×0.1＝3.8 製造業から　38×0.2＝7.6 を中間投入する	製造業は中間需要76を生産するため 農林水産業から76×0.25＝19 製造業から　76×0.5 ＝38 を中間投入する	農林水産業 3.8＋19＝22.8 製造業 7.6＋38＝45.6
	3次波及	農林水産業は中間需要22.8を生産するため 農林水産業から22.8×0.1＝2.28 製造業から　22.8×0.2＝4.56 を中間投入する	製造業は中間需要45.6を生産するため 農林水産業から45.6×0.25＝11.4 製造業から　45.6×0.5 ＝22.8 を中間投入する	農林水産業 2.28＋11.4＝13.68 製造業 4.56＋22.8＝27.36
	4次波及	農林水産業は中間需要13.68を生産するため 農林水産業から13.68×0.1＝1.368 製造業から　13.68×0.2＝2.736 を中間投入する	製造業は最終需要27.36を生産するため 農林水産業から27.36×0.25＝6.84 製造業から　27.36×0.5 ＝13.68 を中間投入する	農林水産業 1.368＋6.84＝8.208 製造業 2.736＋13.68＝16.416
	5次波及	農林水産業は中間需要8.208を生産するため 農林水産業から8.208×0.1＝0.8208 製造業から　8.208×0.2＝1.6416 を中間投入する	製造業は最終需要16.416を生産するため 農林水産業から16.416×0.25＝4.104 製造業から　16.416×0.5 ＝8.208 を中間投入する	農林水産業 0.8208＋4.104＝4.9248 製造業 1.6416＋8.208＝9.8496
	⋮	以下同じ計算を繰り返す。 ⋮	以下同じ計算を繰り返す。 ⋮	（無限に 0 に近づく。）

	直接効果（最終需要）	間接効果（中間需要）						合計
		1次波及	2次波及	3次波及	4次波及	5次波及	…………	
農林水産業	80	38	22.8	13.68	8.208	4.9248	…………	175
製造業	120	76	45.6	27.36	16.416	9.8496	…………	310

需要が決まれば，最終需要を満たすべき産業１と産業２の必要生産額を求めることができる。これが，均衡産出高モデルの考え方である。

次に，今まで述べてきたことを，表５－５の仮設例で計算してみる。

表５－５　産業連関表（仮設例２）

（単位：億円）

	農林水産業	製造業	最終需要	県内生産額
農林水産業	10	50	40	100
製造業	20	100	80	200
最終需要	70	50		
県内生産額	100	200		

例えば，農林水産業についてみると，農林水産業は，その生産物100億円を生産するために，自部門から10億円，製造業から20億円の原材料等を投入しており，その結果生み出された粗付加価値は70億円である。農林水産業の生産物１単位当たりの必要投入量を求めると，自部門からは0.1（10÷100），製造業からは0.2（20÷100）となる。製造業についても同様に求められ，それをまとめたものが表５－６の投入係数表である。

表５－６ 投入係数表

	農林水産業	製造業
農林水産業	0.10	0.25
製造業	0.20	0.50
粗付加価値	0.70	0.25
県内生産額	1.00	1.00

ここで，表５－５の仮設例を産出バランス式でみると，次のようになる。

$$\begin{array}{lcccc} & \text{中間需要} & \text{最終需要} & & \text{生産額} \\ \text{農林水産業} & 10+50 & +\ 40 & = & 100 \\ \text{製　造　業} & 20+100 & +\ 80 & = & 200 \end{array}$$

この式を投入係数を用いて表すと，次のようになる。

$$\begin{array}{lccc} & \text{中間需要} & \text{最終需要} & \text{生産額} \\ \text{農業水産業} & 0.1\times100+0.25\times200 & +40= & 100 \\ \text{製　造　業} & 0.2\times100+0.5\times200 & +80= & 200 \end{array}$$

ここで，第ｉ産業の最終需要，生産額をそれぞれF_i，X_iと表すと，次のようになる。

$$\left.\begin{array}{l} 0.1X_1+0.25X_2+F_1=X_1 \\ 0.2X_1+0.5X_2+F_2=X_2 \end{array}\right] \quad \cdots\cdots⑤$$

この⑤式に仮設例の最終需要F_1＝40億円，F_2＝80億円をあてはめて連立方程式を解くと，$X_1=100$，$X_2=200$が求められる。

さて，仮に農林水産業への最終需要が40億円から80億円に，製造業への最終需要が80億円から120億円にそれぞれ増加したとして，このときの農林水産業，製造業の生産額X_1，X_2がいくらになるかを計算してみる。

$F_1=80$，$F_2=120$を⑤式にあてはめてみると，次のようになる。

$$\left.\begin{array}{l} 0.1X_1+0.25X_2+80=X_1 \\ 0.2X_1+0.5X_2+120=X_2 \end{array}\right] \quad \cdots\cdots⑥$$

求める生産額X_1，X_2は，この連立方程式を解くことによって得られる。

⑥式を移行して整理すると，

$$\left[\begin{array}{ll} 0.9X_1-0.25X_2=\ 80 & \cdots\cdots⑦ \\ 0.2X_1-0.5X_2=-120 & \cdots\cdots⑧ \end{array}\right.$$

⑦×２　　$1.8X_1-0.5X_2=160$　……⑨

⑧と⑨から　$1.6X_1=280$　　$\therefore X_1=175$　……⑩

⑩を⑦に代入して　$0.9\times175-0.25X_2=80$

$\therefore X_2=310$

したがって，求める解は，次のようになる。

$$\left[\begin{array}{lll} X_1\ (\text{農林水産業の生産額}) & = & 175\ (\text{億円}) \\ X_2\ (\text{製　造　業の生産額}) & = & 310\ (\text{億円}) \end{array}\right.$$

これは，最終需要が農林水産業，製造業ともに40億円ずつ増加したときに，生産水準が，農林水産業は100から175へ，製造業は200から310へそれぞれ引き上げられ，最終的な生産増加額は，農林水産業が75億円，製造業が110億円になることを示している。

つまり，最終需要の増加は，各産業がその増加分のみを生産すればよいのではなく，生産過程で原材料に対する需要が発生し，この新たな需要増が各産業の生産を更に誘発し，その結果再び原材料に対する需要が発生する，という金額的には徐々に小さくなりながらも，無限に続く生産の総累積額として上記のような生産額が求まるということである。

次に，投入係数を用いて，最終需要の増加が中間需要を次々に誘発していくという生産の逐次波及過程を考えてみることにする。

⑤式において，まず最終需要F_1，F_2が与えられると，各産業は，その最終需要を満たすだけの生産を行わなければならない。しかし，この生産を行うためには，投入係数にしたがって原材料等を投入しなければならない（第１次の中間需要の発生）。また，各産業がこの第１次の中間需要を満たすための生産を行うには，さらに投入係数にしたが

2　産業連関表の使い方

産業連関表は，これをそのままの姿で読み取ることによって，経済の取引関係の実態を明らかにすることができるが，表作成の主たる目的は，表から導き出される投入係数や逆行列係数を用いて，産業連関分析を行うことにある。

ここでは，投入係数や逆行列係数の説明と最終需要と生産や粗付加価値などの関係について述べることにする。

(1) 投入係数

まず，簡単なモデルを使って説明することにする。

表５－２は，説明の簡略化のため輸移入を省略した２部門の産業連関表である。

表5－2 産業連関表(仮設例1)

	産業1	産業2	最終需要	県内生産額
産業1	$\chi 11$	$\chi 12$	F1	X1
産業2	$\chi 21$	$\chi 22$	F2	X2
粗付加価値	V1	V2		
県内生産額	X1	X2		

この表において，X_i，V_i，F_iは，それぞれ第ｉ部門の生産額，粗付加価値，最終需要を意味する。また，χ_{ij}は，第ｊ部門が第ｉ部門から購入した中間投入額，あるいは，第ｉ部門が第ｊ部門へ販売した中間需要額である。なお，「ｉ＝１，２」，「ｊ＝１，２」である。

第ｊ部門が第ｉ部門から購入した中間投入額を第ｊ部門の生産額で除したものを投入係数といい，a_{ij}で表す。

これを，表５－２について計算すると，

$$\left.\begin{array}{ll} a_{11}=\dfrac{\chi_{11}}{X_1}, & a_{12}=\dfrac{\chi_{12}}{X_2} \\ a_{21}=\dfrac{\chi_{21}}{X_1}, & a_{22}=\dfrac{\chi_{22}}{X_2} \end{array}\right] \cdots\cdots①$$

となり，表５－３が得られる。

表5－3 投入係数表

	産業1	産業2
産業1	a_{11}	a_{12}
産業2	a_{21}	a_{22}

①式から明らかなように，投入係数というのは，「ある産業で生産物１単位を生産するのに必要な各産業からの原材料投入量」を意味し，生産物１単位に対する投入原材料の割合を示している。

なお，産業連関分析では，各産業部門が生産活動を行うために投入する原材料等の割合（生産技術構造）は，短期的には変わらない（投入係数の安定性）という仮定をおいている。

また，各産業が原材料として投入した部門（内生部門）の合計を中間投入率といい，粗付加価値を生産額で除した値を粗付加価値率という。粗付加価値率というのは，「ある産業の生産物１単位に含まれている粗付加価値の割合」を意味している。中間投入率と粗付加価値率を合計すると１になる。

ここで，投入係数を具体的な計数によりみることにする。

表５－４は，表５－１の産業連関表の各産業の投入額を生産額で除して得られた投入係数表である。

表5－4 投入係数表(粗付加価値率を含む)

		第１次産業	第２次産業	第３次産業	内生部門計
中間投入	第１次産業	0.111593	0.024589	0.002171	0.017402
	第２次産業	0.174811	0.404684	0.109062	0.277672
	第３次産業	0.142240	0.189944	0.221675	0.201883
	計	0.428645	0.619217	0.332908	0.496957
粗付加価値		0.571355	0.380783	0.667092	0.503043
県内生産額		1.000000	1.000000	1.000000	1.000000

この表をみると，例えば，第１次産業では，１単位の生産をあげるために，自部門から 0.111593，第２次産業から 0.174811，第３次産業から 0.142240 をそれぞれ原材料として中間投入し，その合計は0.428645 となっている。そして，その結果0.571355 の粗付加価値を生み出したことを示している。

ところで，表５－２をヨコ方向にみると，次の産出バランス式が導かれる。

$$\left.\begin{array}{l} 産業1：\chi_{11}+\chi_{12}+F_1=X_1 \\ 産業2：\chi_{21}+\chi_{22}+F_2=X_2 \end{array}\right] \cdots\cdots②$$

この②式は，「中間需要額＋最終需要額＝生産額」ということを表しており，需要を満たすために生産が行われたということを意味している。これを，需給均衡方程式という。

ここで，①式を次のように変形する。

$$\left.\begin{array}{l} \chi_{11}=a_{11}X_1,\ \chi_{12}=a_{12}X_2 \\ \chi_{21}=a_{21}X_1,\ \chi_{22}=a_{22}X_2 \end{array}\right] \cdots\cdots③$$

この③式を用いて②式を表すと，次のようになる。

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}X_1+a_{12}X_2+F_1=X_1 \\ a_{21}X_1+a_{22}X_2+F_2=X_2 \end{array}\right] \cdots\cdots④$$

つまり，各産業の中間需要を投入係数と生産額を用いて表すことができたことになる。この④式は，もし投入係数が事前に定まっているとすると，未知数が４つ（F_1，F_2，X_1，X_2）の連立方程式である。したがって，最終需要F_1，F_2が決まれば，残る未知数は生産額X_1，X_2の２つだけであり，この連立方程式を解くことができる。つまり，最終

(4) 最終需要による生産誘発

ア．生産誘発額

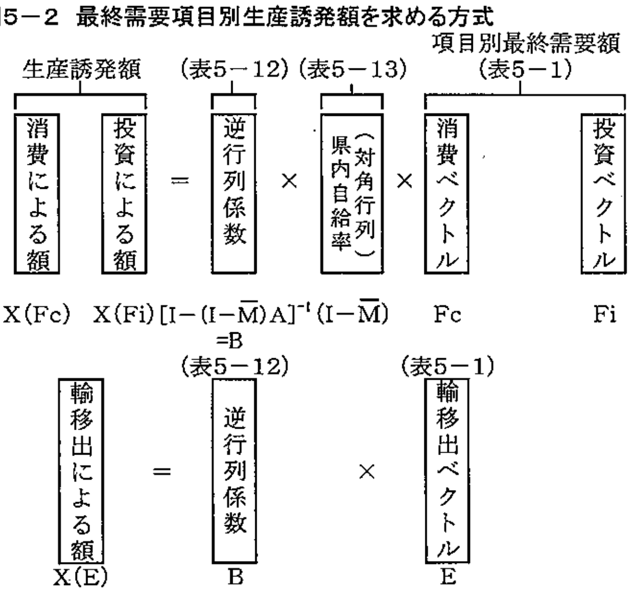
各産業部門は，生産に必要な原材料としての需要である中間需要や消費，投資，輸移出等の最終需要を満たすために生産を行うが，究極的にはすべて最終需要を満たすために生産活動を行っていると考えられる。

このことは，逆に，すべての生産は究極的には最終需要によって誘発されるということであり，このようにして誘発された生産額を最終需要による生産誘発額と呼んでいる。

これにより，各産業部門の生産がどの最終需要によって支えられているかがわかれば，最終需要の変動に対する各部門への影響を測定することができる。

最終需要項目別生産誘発額は，あらかじめ求められた逆行列係数に，項目別最終需要額を乗じることにより求められる。また，このようにして求めた最終需要項目別生産誘発額を各部門別に行合計（ヨコ方向）すると，それぞれの部門の生産額に等しくなる。

図5−2 最終需要項目別生産誘発額を求める方式



＜最終需要項目別生産誘発額の求め方＞

生産誘発額は，図5−2のように，県内最終需要（消費・投資）によるもの及び輸移出によるものの 2 つに分けて求める。輸移出を別に算出するのは，輸移出品はすべて県内産品であり，輸移入品を含まないという産業連関表の前提によるものである。

(ｱ) 表5−1より県内自給率を求め（表5−13），それを消費及び投資に乗じて県内産品に対する最終需要を求める。

表5−13 輸移入率と県内自給率

	輸移入率	県内自給率
第1次産業	0.452806	0.547194
第2次産業	0.642481	0.357519
第3次産業	0.205248	0.794752
合計	0.418882	0.581118

(注) 1. 輸移入率＝輸移入額÷県内需要額
2. 県内需要額＝中間需要計＋県内最終需要額
3. 県内自給率＝1－輸移入率

（単位：億円）

	消費（I-$\overline{M}$）Fc	投資（I-$\overline{M}$）Fi	輸移出（E）
第1次産業	0.547194× 844 ＝ 462	0.547194× 74 ＝ 41	2,919
第2次産業	0.357519×14,220 ＝ 5,084	0.357519×26,633 ＝ 9,522	100,143
第3次産業	0.794752×61,239 ＝48,669	0.794752× 4,204 ＝ 3,341	9,811
合計	54,215	12,903	112,872

(ｲ) 各最終需要項目別に生産誘発額を計算する。

（B＝［I－（I－$\overline{M}$）A］$^{-1}$とする。）

① 消費による生産誘発額

（表5－12）　（表5－14）

$$B\cdot(I\text{-}\overline{M})Fc=\begin{bmatrix}1.066462 & 0.017191 & 0.002352\\ 0.085311 & 1.180380 & 0.055991\\ 0.161973 & 0.218654 & 1.224435\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}462\\ 5,084\\ 48,669\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}694\\ 8,765\\ 60,779\end{bmatrix}$$

② 投資による生産誘発額

（表5－12）　（表5－14）

$$B\cdot(I\text{-}\overline{M})Fi=\begin{bmatrix}1.066462 & 0.017191 & 0.002352\\ 0.085311 & 1.180380 & 0.055991\\ 0.161973 & 0.218654 & 1.224435\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}41\\ 9,522\\ 3,341\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}215\\ 11,430\\ 6,179\end{bmatrix}$$

③ 輸移出による生産誘発額

（表5－12）

$$B\cdot E=\begin{bmatrix}1.066462 & 0.017191 & 0.002352\\ 0.085311 & 1.180380 & 0.055991\\ 0.161973 & 0.218654 & 1.224435\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2,919\\ 100,143\\ 9,811\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4,857\\ 119,005\\ 34,382\end{bmatrix}$$

(ｳ) 計算結果をまとめる。

表5−15 最終需要項目別生産誘発額

（単位：億円）

	消費	投資	輸移出	合計
第1次産業	694	215	4,857	5,767
第2次産業	8,765	11,430	119,005	139,200
第3次産業	60,779	6,179	34,382	101,340
合計	70,238	17,824	158,244	246,306

生産額と一致する。

(注) 四捨五入の関係で内訳は必ずしも合計と一致しない。

この表をみると，県内産品に対する消費額 5 兆 4215 億円により，1.30 倍の 7 兆 238 億円の生産が誘発され，同様に県内産品に対する投資額 1 兆 2903 億円により，1.38 倍の 1 兆 7824 億円，輸移出額 11 兆 2872 億円により，1.40 倍の 15 兆 8244 億円の生産がそれぞれ誘発された。そして，その合計は，県内生産額の 24 兆 6306 億円と一致する。

また，第 1 次産業を例にとると，消費で 694 億円，投資で 215 億円輸移出で 4857 億円の生産がそれぞれ誘発され，その合計は，第 1 次産業の県内生産額 5767 億円と一致する。

なお，ここで注意を要する点は，例えば，第 1 次産業の輸移出による生産誘発額といった場合，第 1 次産業の輸移出のみによる誘発額ということではなく，すべての産業の輸移出による第 1 次産業の生産誘発額を意味する点である。

イ．生産誘発係数

最終需要項目別生産誘発額（表５－１５）をそれぞれ対応する最終需要の合計額（表５－１の最終需要の列計）で除すことにより求められ，項目別最終需要 1 単位が各産業の生産をどれだけ誘発するかを示している。

<計算方法>

$$\text{生産誘発係数} = \frac{\text{最終需要項目別生産誘発額}}{\text{最終需要項目別合計（列計）}}$$

(ｱ) この式により，次のように求める。

(単位:億円)

	消費	投資	輸移出	合計
第1次産業	694 ÷ 76,302 = 0.009098	215 ÷ 30,911 = 0.006955	4,857 ÷ 112,872 = 0.043035	5,767 ÷ 220,085 = 0.026202
第2次産業	8,765 ÷ 76,302 = 0.114876	11,430 ÷ 30,911 = 0.369765	119,005 ÷ 112,872 = 1.054334	139,200 ÷ 220,085 = 0.632482
第3次産業	60,779 ÷ 76,302 = 0.796557	6,179 ÷ 30,911 = 0.199906	34,382 ÷ 112,872 = 0.304608	101,340 ÷ 220,085 = 0.460458
合計	70,238 ÷ 76,302 = 0.920531	17,824 ÷ 30,911 = 0.576626	158,244 ÷ 112,872 = 1.401976	246,306 ÷ 220,085 = 1.119142

(ｲ) 計算結果をまとめる。

表５－１６　最終需要項目別生産誘発係数

	消費	投資	輸移出	合計
第1次産業	0.009098	0.006955	0.043035	0.026202
第2次産業	0.114876	0.369765	1.054334	0.632482
第3次産業	0.796557	0.199906	0.304608	0.460458
合計	0.920531	0.576626	1.401976	1.119142

この表をみると，例えば，1 億円の消費が生じると，第 1 次産業は 91 万円，第 2 次産業は 1149 万円，第 3 次産業は 7966 万円の生産が誘発され，全産業では 9205 万円の生産が誘発されることを示している。この係数が大きいものほど，生産誘発効果が大きい。したがって，本県の場合は，輸移出増があった場合が最も生産誘発効果が大きいことになる。

ウ．生産誘発依存度

各最終需要により誘発された産業別の生産誘発額を生産誘発額合計（行計）で除すことにより求められる。つまり，各産業ごとの消費，投資，輸移出による生産誘発額の構成比のことである。この構成比をみることにより，各産業の生産額がどの最終需要項目によりどれくらい誘発されているかがわかる。

<計算方法>

$$\text{生産誘発依存度} = \frac{\text{最終需要項目別生産誘発額}}{\text{産業別生産誘発額合計}}$$

(ｱ) この式により，次のように求める。

(単位:億円)

	消費	投資	輸移出	合計
第1次産業	694 ÷ 5,767 = 0.120379	215 ÷ 5,767 = 0.037280	4,857 ÷ 5,767 = 0.842340	5,767 ÷ 5,767 = 1.000000
第2次産業	8,765 ÷ 139,200 = 0.062969	11,430 ÷ 139,200 = 0.082110	119,005 ÷ 139,200 = 0.854920	139,200 ÷ 139,200 = 1.000000
第3次産業	60,779 ÷ 101,340 = 0.599753	6,179 ÷ 101,340 = 0.060976	34,382 ÷ 101,340 = 0.339271	101,340 ÷ 101,340 = 1.000000
合計	70,238 ÷ 246,306 = 0.285167	17,824 ÷ 246,306 = 0.072365	158,244 ÷ 246,306 = 0.642468	246,306 ÷ 246,306 = 1.000000

(ｲ) 計算結果をまとめる。

表５－１７　最終需要項目別生産誘発依存度

	消費	投資	輸移出	合計
第1次産業	0.120379	0.037280	0.842340	1.000000
第2次産業	0.062969	0.082110	0.854920	1.000000
第3次産業	0.599753	0.060976	0.339271	1.000000
合計	0.285167	0.072365	0.642468	1.000000

この表をみると，本県の生産額のうち 64.2%が輸移出により誘発されており，輸移出依存型といえる。また，産業別にみると，第 1 次産業，第 2 次産業はそれぞれ輸移出に 84.2%，85.5%依存しており，輸移出依存型といえ，第 3 次産業は消費に 60.0%依存しており，消費依存型といえる。

(5) 最終需要による粗付加価値誘発

ア．総合粗付加価値係数

生産額に対する粗付加価値額の割合を粗付加価値率（粗付加価値係数）といい，生産物１単位当たりの粗付加価値比率を示している。

前述したとおり，生産は最終需要によって誘発されるから，その関係を通じて，最終需要はまた粗付加価値を誘発する源泉といえる。そこで，ある産業に１単位の最終需要が生じたときに，直接，間接に誘発されるすべての産業の粗付加価値を示すのが総合粗付加価値係数である。

総合粗付加価値係数は，県内最終需要（消費・投資）によるものと輸移出によるものとがある。これは，輸移出品はすべて県内産品であり，輸移入品を含まないという産業連関表の前提によるものである。

粗付加価値係数（$\hat{V}$）に［Ｉ－（Ｉ－$\overline{M}$）Ａ］$^{-1}$型逆行列係数（Ｂ）を乗じたものの列和が輸移出による総合粗付加価値係数であり，この係数にさらに県内自給率行列（Ｉ－$\overline{M}$）を乗じたものの列和が県内最終需要による総合粗付加価値係数である。

<輸移出による総合粗付加価値係数の求め方>

(ｱ) 粗付加価値係数（$\hat{V}$）×逆行列係数（Ｂ）を求める。

$$\hat{V}B = \begin{bmatrix} 0.571355 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.380783 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 0.667092 \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} 1.066462 & 0.017191 & 0.002352 \\ 0.085311 & 1.180380 & 0.055991 \\ 0.161973 & 0.218654 & 1.224435 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.609328 & 0.009822 & 0.001344 \\ 0.032485 & 0.449469 & 0.021320 \\ 0.108051 & 0.145862 & 0.816810 \end{bmatrix}$$

(ｲ) $\hat{V}$Ｂの列和を求める。

$$i(\hat{V}B) = (\ 1 \quad 1 \quad 1\ )$$

$$\times \begin{bmatrix} 0.609328 & 0.009822 & 0.001344 \\ 0.032485 & 0.449469 & 0.021320 \\ 0.108051 & 0.145862 & 0.816810 \end{bmatrix}$$

$$= (\ 0.749864 \quad 0.605153 \quad 0.839474\ )$$

(ｳ) 計算結果をまとめる。

表５－１８　輸移出に係る粗付加価値準逆行列係数及び総合粗付加価値係数

$\hat{V}B$

	第1次産業	第2次産業	第3次産業
第1次産業	0.609328	0.009822	0.001344
第2次産業	0.032485	0.449469	0.021320
第3次産業	0.108051	0.145862	0.816810
総合粗付加価値係数	0.749864	0.605153	0.839474

<消費及び投資による総合粗付加価値係数の求め方>

(ｱ) 輸移出に係る準逆行列係数（$\hat{V}$Ｂ）×県内自給率行列（Ｉ－$\overline{M}$）を求める。

$$\hat{V}B(I-\overline{M}) = \begin{bmatrix} 0.609328 & 0.009822 & 0.001344 \\ 0.032485 & 0.449469 & 0.021320 \\ 0.108051 & 0.145862 & 0.816810 \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} 0.547194 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.357519 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 0.794752 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.333421 & 0.003512 & 0.001068 \\ 0.017775 & 0.160693 & 0.016944 \\ 0.059125 & 0.052148 & 0.649161 \end{bmatrix}$$

(ｲ) $\hat{V}$Ｂ（Ｉ－$\overline{M}$）の列和を求める。

$$i[\hat{V}B(I-\overline{M})] = (\ 1 \quad 1 \quad 1\ )$$

$$\times \begin{bmatrix} 0.333421 & 0.003512 & 0.001068 \\ 0.017775 & 0.160693 & 0.016944 \\ 0.059125 & 0.052148 & 0.649161 \end{bmatrix}$$

$$= (\ 0.410321 \quad 0.216353 \quad 0.667174\ )$$

(ｳ) 計算結果をまとめる。

表5－19　県内最終需要に係る粗付加価値準逆行列係数及び総合粗付加価値係数

$\hat{V}B(I-\overline{M})$

	第1次産業	第2次産業	第3次産業
第1次産業	0.333421	0.003512	0.001068
第2次産業	0.017775	0.160693	0.016944
第3次産業	0.059125	0.052148	0.649161
総合粗付加価値係数	0.410321	0.216353	0.667174

表５－１８及び表５－１９をみると，いずれも第３次産業の財貨・サービスが輸移出や消費・投資されたときに全産業に誘発される粗付加価値の合計が最も大きい。これは，第３次産業の粗付加価値率が高いからである。

イ．粗付加価値誘発額

粗付加価値誘発額は，粗付加価値係数に生産誘発額を乗じる方式（図５－３）と粗付加価値係数に逆行列係数を乗じ，さらに項目別最終需要を乗じる方式（図５－４）の２通りの求め方があり，いずれも結果は同じになる。

また，これを各産業別に合計したものは，各産業の粗付加価値額に等しくなる。

図5－3 生産誘発額から粗付加価値誘発額を求める方式

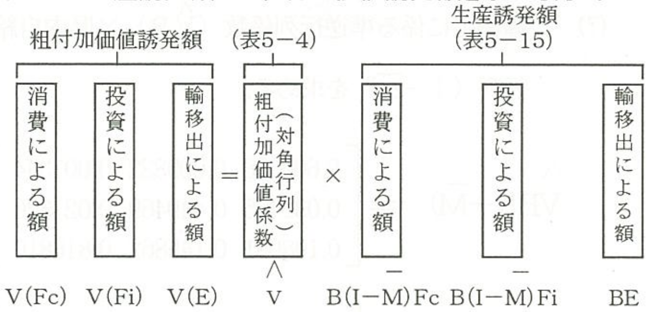
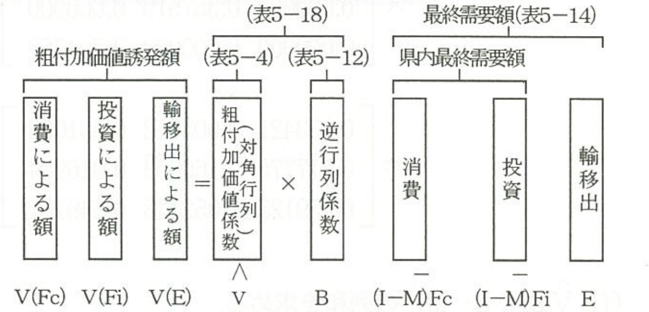


図5－4 最終需要から粗付加価値誘発額を求める方式



＜最終需要項目別粗付加価値誘発額の求め方＞

ここでは，表５－１４及び表５－１８を用いて図５－４の方式により粗付加価値誘発額を求めることにする。

(ア)　消費による粗付加価値誘発額を求める。

$$\hat{V}B\cdot(I-\bar{M})Fc=\overset{(\text{表}5-18)}{\begin{bmatrix}0.609328 & 0.009822 & 0.001344\\0.032485 & 0.449469 & 0.021320\\0.108051 & 0.145862 & 0.816810\end{bmatrix}}\times\overset{(\text{表}5-14)}{\begin{bmatrix}462\\5,084\\48,669\end{bmatrix}}=\begin{bmatrix}397\\3,338\\40,545\end{bmatrix}$$

(イ) 投資による粗付加価値誘発額を求める。

$$\hat{V}B\cdot(I-\bar{M})Fi=\overset{(\text{表}5-18)}{\begin{bmatrix}0.609328 & 0.009822 & 0.001344\\0.032485 & 0.449469 & 0.021320\\0.108051 & 0.145862 & 0.816810\end{bmatrix}}\times\overset{(\text{表}5-14)}{\begin{bmatrix}41\\9,522\\3,341\end{bmatrix}}=\begin{bmatrix}123\\4,352\\4,122\end{bmatrix}$$

(ウ) 輸移出による粗付加価値誘発額を求める。

$$\hat{V}B\cdot E=\overset{(\text{表}5-18)}{\begin{bmatrix}0.609328 & 0.009822 & 0.001344\\0.032485 & 0.449469 & 0.021320\\0.108051 & 0.145862 & 0.816810\end{bmatrix}}\times\overset{(\text{表}5-14)}{\begin{bmatrix}2,919\\100,143\\9,811\end{bmatrix}}=\begin{bmatrix}2,775\\45,315\\22,936\end{bmatrix}$$

(エ) 計算結果をまとめる。

表5－20 最終需要項目別粗付加価値誘発額

(単位:億円)

	消費	投資	輸移出	合計
第1次産業	397	123	2,775	3,295
第2次産業	3,338	4,352	45,315	53,005
第3次産業	40,545	4,122	22,936	67,603
合計	44,279	8,597	71,026	123,903

↑粗付加価値額と一致する

(注)1. 四捨五入の関係で内訳は必ずしも合計と一致しない。

この表をみると，県内産品に対する消費額５兆4215億円により，４兆4279億円の粗付加価値が誘発され，同様に県内産品に対する投資額１兆2903億円により8597億円，輸移出額11兆2872億円により７兆1026億円の粗付加価値がそれぞれ誘発された。そして，その合計は，粗付加価値額12兆3903億円と一致する。

また，第２次産業を例にとると，消費で3338億円，投資で4352億円，輸移出で４兆5315億円の粗付加価値がそれぞれ誘発され，その合計は，第２次産業の粗付加価値額５兆3005億円と一致する。

ウ．粗付加価値誘発係数

最終需要項目別粗付加価値誘発額（表５－２０）をそれぞれ対応する最終需要の合計額（表５－１の最終需要の列計）で除すことにより求められ，項目別最終需要１単位が各産業の粗付加価値をどれだけ誘発するかを示している。

＜計算方法＞

$$\text{粗付加価値誘発係数}=\frac{\text{最終需要項目別粗付加価値誘発額}}{\text{最終需要項目別合計（列計）}}$$

表5－21 最終需要項目別粗付加価値誘発係数

	消費	投資	輸移出	合計
第1次産業	0.005198	0.003974	0.024588	0.014970
第2次産業	0.043743	0.140800	0.401472	0.240839
第3次産業	0.531377	0.133356	0.203201	0.307168
合計	0.580318	0.278130	0.629262	0.562977

この表をみると，最終需要合計では，１億円の最終需要が生じると，5630万円の粗付加価値が誘発されることを示している。輸移出入のない封鎖経済では，１単位の最終需要が生じると，必ず１単位の粗付加価値が誘発されるが，現実の開放経済では粗付加価値の県外流出が生じる。したがって，１億円との差額4370万円が県外流出分である。

また，最終需要項目別にみると，輸移出（0.6293）の粗付加価値誘発効果が最も大きく，次いで消費（0.5803），投資（0.2781）の順になっている。

エ．粗付加価値誘発依存度

各最終需要により誘発された産業別の粗付加価値誘発額を粗付加価値誘発額合計（行計）で除すことにより求められる。つまり，各産業ごとの消費，投資，輸移出による粗付加価値誘発額の構成比のことである。この構成比をみることにより，各産業の粗付加価値額がどの最終需要項目によりどれぐらい誘発されているかがわかる。

＜計算方法＞

$$\text{粗付加価値誘発依存度}=\frac{\text{最終需要項目別粗付加価値誘発額}}{\text{産業別粗付加価値誘発額合計}}$$

表5－22　最終需要項目別粗付加価値誘発依存度

	消費	投資	輸移出	合計
第1次産業	0.120379	0.037280	0.842340	1.000000
第2次産業	0.062969	0.082110	0.854920	1.000000
第3次産業	0.599753	0.060976	0.339271	1.000000
合計	0.357373	0.069387	0.573240	1.000000

この表をみると，本県の粗付加価値額のうち 57.3%が輸移出により誘発されており，輸移出依存型といえる。

(6) 最終需要による輸移入誘発

ア．総合輸移入係数

各産業部門は，需要を賄うために生産を行うが，県内産品だけでは需要をすべて賄えないため，不足分は輸移入によって補うことになる。

既に述べたとおり，生産は究極的には最終需要によって誘発されるが，その生産を行うために直接，間接に必要とする輸移入額も最終需要により誘発されるといえる。

先にみたとおり，$[I-(I-\overline{M})A]^{-1}$ (=B) 型モデルでは，

輸移入額　$M=\overline{M}\cdot(AX+Fd)$ ……………①

生 産 額　$X=B\cdot[(I-\overline{M})Fd+E]$ ……②

と定義される。ここで，②式を①式に代入すると，

$$M=\overline{M}AB(I-\overline{M})Fd+\overline{M}ABE+\overline{M}Fd$$

[県内産品県内最終需要による生産誘発額に占める輸移入品投入額] [輸移出による生産誘発額に占める輸移入品投入額] [県内最終需要の直接輸移入分]

$$=[\overline{M}AB(I-\overline{M})+\overline{M}]Fd+\overline{M}ABE$$

となり，輸移入額（M）は，県内最終需要（Fd）及び輸移出（E）のそれぞれにより誘発されるものの合計として表される。

したがって，県内最終需要（消費・投資）及び輸移出に対応するものとして $[\overline{M}AB(I-\overline{M})+\overline{M}]$ と $\overline{M}AB$ の2種類の係数が求められ，この係数に，県内最終需要及び輸移出をそれぞれ乗じることにより輸移入誘発額が求められる。

これらの係数の列和が総合輸移入係数であり，最終需要が1単位生じたときの直接，間接のすべての産業の輸移入誘発水準を示している。

<輸移出による総合輸移入係数の求め方>

(ｱ) 輸移入係数（対角行列）$(\overline{M})$ ×投入係数（A）を求める。

$$\overline{M}A=\begin{bmatrix}0.452806 & 0 & 0\\ 0 & 0.642481 & 0\\ 0 & 0 & 0.205248\end{bmatrix}$$

$$\times\begin{bmatrix}0.111593 & 0.024589 & 0.002171\\ 0.174811 & 0.404684 & 0.109062\\ 0.142240 & 0.189944 & 0.221675\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0.050530 & 0.011134 & 0.000983\\ 0.112313 & 0.260002 & 0.070070\\ 0.029195 & 0.038986 & 0.045498\end{bmatrix}$$

(ｲ) $\overline{M}A$ × 逆行列係数（B）を求める。

$$\overline{M}AB=\begin{bmatrix}0.050530 & 0.011134 & 0.000983\\ 0.112313 & 0.260002 & 0.070070\\ 0.029195 & 0.038986 & 0.045498\end{bmatrix}$$

$$\times\begin{bmatrix}1.066462 & 0.017191 & 0.002352\\ 0.085311 & 1.180380 & 0.055991\\ 0.161973 & 0.218654 & 1.224435\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0.054998 & 0.014226 & 0.001946\\ 0.153308 & 0.324153 & 0.100618\\ 0.041830 & 0.056468 & 0.057961\end{bmatrix}$$

(ｳ) $\overline{M}AB$の列和を求める。

$$i(\overline{M}AB)=(\ 1\quad 1\quad 1\ )$$

$$\times\begin{bmatrix}0.054998 & 0.014226 & 0.001946\\ 0.153308 & 0.324153 & 0.100618\\ 0.041830 & 0.056468 & 0.057961\end{bmatrix}$$

$$=(\ 0.250136\quad 0.394847\quad 0.160526\ )$$

(ｴ) 計算結果をまとめる。

表5－23　輸移出に係る輸移入準逆行列係数及び総合輸移入係数

$\overline{M}AB$

	第1次産業	第2次産業	第3次産業
第1次産業	0.054998	0.014226	0.001946
第2次産業	0.153308	0.324153	0.100618
第3次産業	0.041830	0.056468	0.057961
総合輸移入係数	0.250136	0.394847	0.160526

＜消費及び投資による総合輸移入係数の求め方＞

(ｱ) 輸移出に係る準逆行列係数（$\overline{M}AB$）×県内自給率行列（I－$\overline{M}$）を求める。

$$\overline{M}AB(I-\overline{M}) = \begin{bmatrix} 0.054998 & 0.014226 & 0.001946 \\ 0.153308 & 0.324153 & 0.100618 \\ 0.041830 & 0.056468 & 0.057961 \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} 0.547194 & 0 & 0 \\ 0 & 0.357519 & 0 \\ 0 & 0 & 0.794752 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.030094 & 0.005086 & 0.001547 \\ 0.083889 & 0.115891 & 0.079967 \\ 0.022889 & 0.020188 & 0.046065 \end{bmatrix}$$

(ｲ) $\overline{M}AB$（I－$\overline{M}$）＋$\overline{M}$を求める。

$$\overline{M}AB(I-\overline{M})+\overline{M} = \begin{bmatrix} 0.030094 & 0.005086 & 0.001547 \\ 0.083889 & 0.115891 & 0.079967 \\ 0.022889 & 0.020188 & 0.046065 \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} 0.452806 & 0 & 0 \\ 0 & 0.642481 & 0 \\ 0 & 0 & 0.205248 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.482900 & 0.005086 & 0.001547 \\ 0.083889 & 0.758372 & 0.079967 \\ 0.022889 & 0.020188 & 0.251313 \end{bmatrix}$$

(ｳ) $\overline{M}AB$（I－$\overline{M}$）＋$\overline{M}$の列和を求める。

$$i[\overline{M}AB(I-\overline{M})+\overline{M}] = (\ 1 \quad 1 \quad 1\ )$$

$$\times \begin{bmatrix} 0.482900 & 0.005086 & 0.001547 \\ 0.083889 & 0.758372 & 0.079967 \\ 0.022889 & 0.020188 & 0.251313 \end{bmatrix}$$

$$= (\ 0.589679 \quad 0.783647 \quad 0.332826\ )$$

(ｴ) 計算結果をまとめる。

表5－24 県内最終需要に係る輸移入準逆行列係数及び総合輸移入係数

$\overline{M}AB(I-\overline{M})+\overline{M}$

	第1次産業	第2次産業	第3次産業
第1次産業	0.482900	0.005086	0.001547
第2次産業	0.083889	0.758372	0.079967
第3次産業	0.022889	0.020188	0.251313
総合輸移入係数	0.589679	0.783647	0.332826

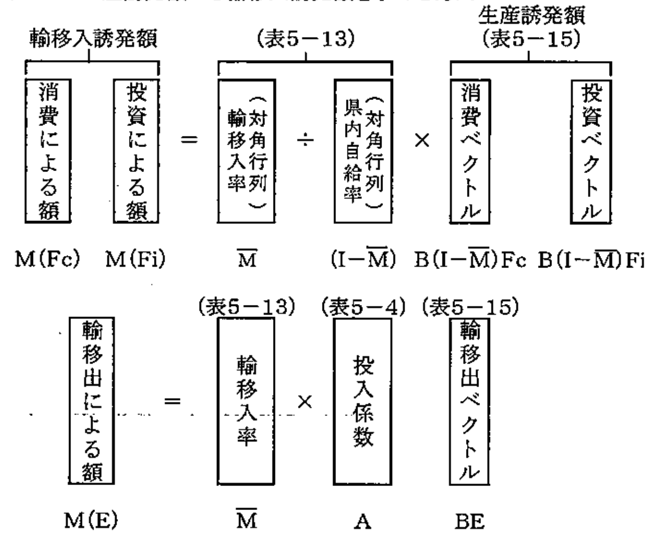
表5－23及び表5－24をみると，いずれも第2次産業の輸移出及び県内最終需要が1単位増加したときが最も輸移入誘発効果が大きい。

イ．輸移入誘発額

輸移入誘発額も，粗付加価値誘発と同様，生産誘発額から求める方式（図5－5）と最終需要から求める方式（図5－6）の2通りの求め方がある。

また，これを各産業別に合計したものは，各産業の輸移入額に等しくなる。

図5－5 生産誘発額から輸移入誘発額を求める方式



＜最終需要項目別輸移入誘発額の求め方＞

ここでは，表5－1，表5－23及び表5－24を用いて図5－6の方式により輸移入誘発額を求めることにする。

(ｱ) 消費による輸移入誘発額を求める。

$$[\overline{M}AB(I-\overline{M})+\overline{M}]\cdot Fc=$$

$$\underset{(表5-24)}{\begin{bmatrix} 0.482900 & 0.005086 & 0.001547 \\ 0.083889 & 0.758372 & 0.079967 \\ 0.022889 & 0.020188 & 0.251313 \end{bmatrix}} \times \underset{(表5-1)}{\begin{bmatrix} 844 \\ 14{,}220 \\ 61{,}239 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 574 \\ 15{,}752 \\ 15{,}696 \end{bmatrix}$$

(ｲ) 投資による輸移入誘発額を求める。

$$[\overline{M}AB(I-\overline{M})+\overline{M}]\cdot Fi=$$

$$\underset{(表5-24)}{\begin{bmatrix} 0.482900 & 0.005086 & 0.001547 \\ 0.083889 & 0.758372 & 0.079967 \\ 0.022889 & 0.020188 & 0.251313 \end{bmatrix}} \times \underset{(表5-1)}{\begin{bmatrix} 74 \\ 26{,}633 \\ 4{,}204 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 178 \\ 20{,}540 \\ 1{,}596 \end{bmatrix}$$

(ｳ) 輸移出による輸移入誘発額を求める。

$$\overline{M}AB\cdot E=$$

$$\underset{(表5-23)}{\begin{bmatrix} 0.054998 & 0.014226 & 0.001946 \\ 0.153308 & 0.324153 & 0.100618 \\ 0.041830 & 0.056468 & 0.057961 \end{bmatrix}} \times \underset{(表5-1)}{\begin{bmatrix} 2{,}919 \\ 100{,}143 \\ 9{,}811 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1{,}604 \\ 33{,}896 \\ 6{,}346 \end{bmatrix}$$

(ｴ) 計算結果をまとめる。

表5－25 最終需要項目別輸移入誘発額

(単位:億円)

	消費	投資	輸移出	合計
第1次産業	574	178	1,604	2,357
第2次産業	15,752	20,540	33,896	70,188
第3次産業	15,696	1,596	6,346	23,638
合計	32,023	22,314	41,846	96,182

輸移入額と一致する

(注) 四捨五入の関係で内訳は必ずしも合計と一致しない。

この表をみると，輸移出による輸移入誘発額が4兆1846億円で最も大きい。

また，産業別にみると，第2次産業が7兆188億円で最も大きく，その内訳は，輸移出により3兆3896億円，投資により2兆540億円，消費により1兆5752億円がそれぞれ誘発されているのがわかる。

ウ．輸移入誘発係数

最終需要項目別輸移入誘発額（表5－25）をそれぞれ対応する最終需要の合計額（表5－1の最終需要の列計）で除すことにより求められ，項目別最終需要1単位が各産業の輸移入をどれだけ誘発するかを示している。

$$輸移入誘発係数 = \frac{最終需要項目別輸移入誘発額}{最終需要項目別合計(列計)}$$

<計算方法>

表5－26 最終需要項目別輸移入誘発係数

	消費	投資	輸移出	合計
第1次産業	0.007528	0.005755	0.014213	0.010708
第2次産業	0.206439	0.664488	0.300306	0.318912
第3次産業	0.205715	0.051627	0.056220	0.107403
合計	0.419682	0.721870	0.370738	0.437023

この表をみると，最終需要合計では，1億円の最終需要が生じると，4370万円の輸移入が誘発されることを示している。

また，最終需要項目別に見ると，投資の輸移入誘発効果が最も大きく，1億円の投資があった場合，7219万円の輸移入が誘発されることを示している。

なお，ここで，表5－21と表5－26の関係をみると，（粗付加価値誘発係数計）＋（輸移入誘発係数計）＝1となっているのがわかる。最終需要合計を例にとると，0.562977＋0.437023＝1となっており，最終需要項目別にみた場合も同じである。（ただし，四捨五入の関係で若干の誤差がある。）これは，（最終需要合計）－（輸移入合計）＝（粗付加価値合計）という，最終需要と粗付加価値のいわゆる2面等価の原則から推察できるわけであり，すなわち，最終需要1単位当たり誘発される粗付加価値と輸移入の和は，最終需要と同じ1単位になることを意味している。

エ．輸移入誘発依存度

各最終需要により誘発された産業別の輸移入誘発額を輸移入誘発額合計（行計）で除すことにより求められる。これにより，各産業の輸移入額がどの最終需要項目によりどれくらい誘発されているかがわかる。

<計算方法>

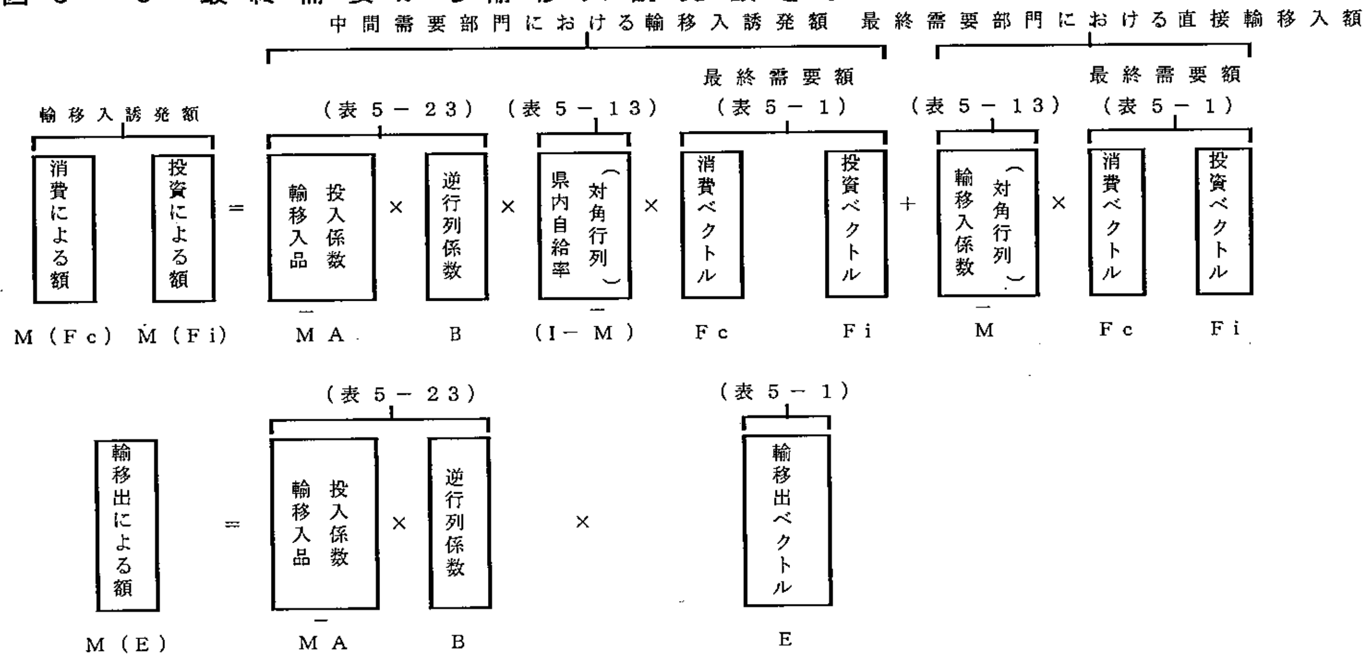
$$輸移入誘発依存度 = \frac{最終需要項目別輸移入誘発額}{産業別輸移入誘発額合計}$$

表5－27 最終需要項目別輸移入誘発依存度

	消費	投資	輸移出	合計
第1次産業	0.243759	0.075490	0.680752	1.000000
第2次産業	0.224423	0.292642	0.482935	1.000000
第3次産業	0.664037	0.067511	0.268451	1.000000
合計	0.332937	0.231993	0.435070	1.000000

この表をみると，第1次産業と第2次産業の輸移入は，輸移出により最も大きく誘発されており，第3次産業の輸移入は，消費により最も大きく誘発されているのがわかる。

図5－6 最終需要から輸移入誘発額を求める方式



3　産業連関表と県民経済計算の関係

産業連関表と県民経済計算は，双方とも一定期間における財貨・サービスの流れを把握するという点で共通点をもち，かつ，経済活動の主体を企業，家計，政府などに大別する点でも同じである。

しかし，県民経済計算は，1県の経済全体を1つの単位であるかのように取り扱うマクロの概念であるのに対し，産業連関表は，1県の経済を数多くの部門に分割し，県民経済計算では考慮していない中間生産物の取引を，部門別に詳細にとらえることに重点を置いている。さらに，消費，投資，輸移出入等の最終需要部門や，雇用者所得，営業余剰等の粗付加価値部門も，その内容を部門別に分割して扱っている。

このように，両者の間には，基本的な性格の相違があり，この結果，産業連関表では，分析目的である産業間の生産技術的な結合関係を明らかにする必要から，各部門間の取引は，財貨及びサービスに限定され，振替的取引並びに金融的取引は，いっさい表から除外される。また，各産業の生産は，純生産又は付加価値だけではなく，原材料等として使用した中間投入額も含めたグロスの生産額として表される。

つまり，県民経済計算は，生産活動により生じた所得の分配面並びに支出面の勘定形式であるのに対し，産業連関表は，財貨・サービスの中間取引と県民経済計算を同時に含んだ勘定形式とみることができる。

ところで，もともと県民経済計算の計数と産業連関表の外生部門（粗付加価値及び最終需要）の計数とは，同じ県経済の流れをとらえたものであり，本来一致すべきものであるが，両者にはそれぞれ独自の概念規定があり，そのままの形では，完全には一致しない。大まかな対応関係は，図5－7のとおりであるが，主な相違点は次のとおりである。

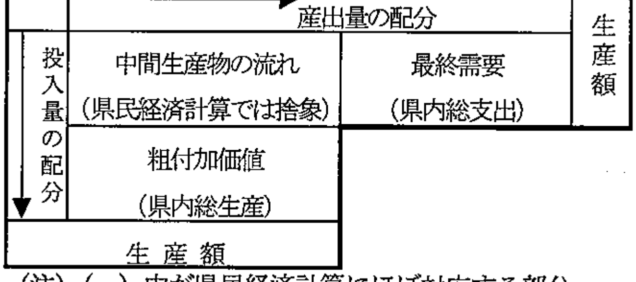
① 調査・推計の対象となる期間について，県民経済計算は会計年度であるが，産業連関表では暦年である。

② 調査・推計の単位について，県民経済計算は事業所ベースであるが，産業連関表では生産活動ベース（アクティベース）である。（商品ベースに近い。）

③ 調査・推計の対象となる地域について，県民経済計算は属人主義であるが，産業連関表では属地主義である。

④ 家計外消費支出の取扱いについて，県民経済計算は中間取引の一部として内生部門に計上しているが，産業連関表では最終需要及び粗付加価値の一部として外生部門に計上している。

図5－7　産業連関表と県民経済計算の大まかな対応関係



（注）（　）内が県民経済計算にほぼ対応する部分。

産業連関表と県民経済計算の大まかな関係を式で表すと，次のとおりである。

産業連関表	調整項目	県民経済計算
粗付加価値計＝（家計外消費 ＋雇用者所得 ＋営業余剰 ＋資本減耗引当 ＋間接税 －経常補助金）	－家計外消費	県内総生産
最終需要計＝（家計外消費 ＋民間消費 ＋一般政府消費 ＋県内総固定資本形成 ＋在庫純増 ＋輸移出 －輸移入）	－家計外消費	県内総支出

（参考）

産業連関表	
粗付加価値	最終需要
①　家計外消費支出 ②　雇用者所得 ③　営業余剰 ④　資本減耗引当 ⑤　間接税 ⑥　（控除）補助金	1　家計外消費支出 2　民間消費支出 3　一般政府消費支出 4　県内総固定資本形成 5　在庫純増 6　輸出 7　移出 8　最終需要計 （1+2+‥+7） 9　（控除）輸入 10　（控除）移入 11　（控除）関税・輸入品商品税
⑦　粗付加価値計 （①+②+③+④+⑤+⑥）	12 ＝最終需要計－輸入－移入－関税・輸入品商品税 （8－9－10－11）
⑦　粗付加価値計 －①　家計外消費支出 ）＋11　関税・輸入品商品税 ＝⑧　市場価格表示の県内総生産	8　最終需要計 －9　輸入 －10　移入 ）－1　家計外消費支出 ＝13　市場価格表示の県内総支出
⑧　市場価格表示の県内総生産 ＋（P）　海外からの要素所得（純） ）＋（P）　県外からの要素所得（純） ＝⑨　市場価格表示の県民総生産	13　市場価格表示の県内総支出 ＋（P）　海外からの要素所得（純） ）＋（P）　県外からの要素所得（純） ＝14　市場価格表示の県民総支出
⑨　市場価格表示の県民総生産 －④　資本減耗引当 －⑤　間接税 －11　関税・輸入品商品税 ）＋⑥　補助金 ＝⑩　県民所得（分配） （要素費用表示の県民純生産）	14　市場価格表示の県民総支出 －④　資本減耗引当 －⑤　間接税 －11　関税・輸入品商品税 ）＋⑥　補助金 ＝15　県民所得（分配） （要素費用表示の県民純生産）

（注）表中項目番号のかわりに（P）とあるのは県民経済計算の勘定項目を示す。

4 「行列」の意味と計算方法

(1) 行列の定義と用語

次のように数を長方形に並べたものを，行列（マトリックス）という。行列を表すには，長方形に並べた数の両側に（ ）を付ける。また，この行列を形成している一つ一つの数を，この行列の要素という。

行列の長方形に並んでいる数のヨコの並びを行，タテの並びを列といい，それぞれ上から順に第１行，第２行，左から順に第１列，第２列という。

$$\begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 8 & 6 \\ 1 & 5 & 3 & 4 \\ 2 & 9 & 0 & 5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \cdots\cdots \text{第1行} \\ \cdots\cdots \text{第2行} \\ \cdots\cdots \text{第3行} \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \text{第1列} & \text{第2列} & \text{第3列} & \text{第4列} \end{array} & \end{array}$$

上の例は要素がすべて定数の行列であるが，行列の要素は定数とは限らず，変数であってもよい。

ある行列の行及び列の数がそれぞれｍ及びｎであるとき，この行列を（ｍ×ｎ）型行列あるいは（ｍ，ｎ）型行列という。したがって，上に示した行列は（３×４）型あるいは（３，４）型である。

行列を１個の文字で表すことがある。その場合は，普通アルファベットの大文字を用い，その要素は，次のように表す。

例えば，行列Ａの第ｉ行，第ｊ列の位置にある要素は，Ａの小文字ａを用いて，

a_{ij}

と表す。そして，これを行列Ａの（ｉ，ｊ）要素という。

したがって，この行列Ａが（ｍ×ｎ）型ならば，

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots\cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

となる。また，行列Ａを（a_{ij}）と表すこともある。

(2) 特殊な形の行列

行列はその形によっていろいろな名称が付けられているが，次に特に重要な正方行列及びベクトルについて説明する。

ア．正方行列

行及び列の数が等しい行列，すなわち要素が正方形に並んでいる行列を，正方行列という。

正方行列には，その形から，次のような特殊な名称で呼ばれているものがある。

(ｱ) 対角行列

次のように左上より右下にいたる対角線上の要素以外の他の要素がすべて０のものを，対角行列という。なお，対角線上の要素に０のものがあってもかまわない。

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

(ｲ) 単位行列

対角行列で，対角線上の要素がすべて１のものを，単位行列という。この行列は，通常Ｉで表される。単位行列は，通常の数の１に相当し，他の行列に掛けてもその行列は変化しない。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

イ．ベクトル

ただ１行あるいは１列よりなる行列を，それぞれ行ベクトル，列ベクトルという。また，すべての要素が１のベクトルを，特に単位行ベクトル，単位列ベクトルという。

行ベクトル　（４ ２ ８ ６）

列ベクトル　$\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

単位行ベクトル　（１ １ １ １）

単位行ベクトル　$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(3) 行列の演算

ア．加減算

行列の加減算は，行及び列の数がそれぞれ等しい行列についてのみ行われる。

行列Ａに別の行列Ｂを加えるとは，この２つの行列の（ｉ，ｊ）要素の和，すなわち（$a_{ij}+b_{ij}$）を新たに（ｉ，ｊ）要素とする行列を作ることをいい，これをＡ＋Ｂと表す。

同様に，行列Ａから行列Ｂを引くとは，この２つの行列の（ｉ，ｊ）要素の差，すなわち（$a_{ij}-b_{ij}$）を新たに（ｉ，ｊ）要素とする行列を作ることをいい，これをＡ－Ｂと表す。

例えば，Ａ及びＢを

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 5 & 4 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 8 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

とすると，Ａ＋Ｂ及びＡ－Ｂは次のようになる。

$$A+B=\begin{bmatrix}3+2 & 9+5\\ 5+1 & 4+8\\ 7+4 & 0+6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 14\\ 6 & 12\\ 11 & 6\end{bmatrix}$$

$$A-B=\begin{bmatrix}3-2 & 9-5\\ 5-1 & 4-8\\ 7-4 & 0-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 5\\ 4 & \triangle 4\\ 3 & \triangle 6\end{bmatrix}$$

イ. 乗　算

行列の掛け算は，掛けられる方（左側）の行列の列数と，掛ける方（右側）の行列の行の数が等しいことが必要である。ここで，ある行列Ａに別の行列Ｂを掛けることとし，Ａを（ℓ, m）型行列，Ｂを（m, n）型行列とする。

さて，行列Ａに行列Ｂを掛けるとは，次の数値

$$\sum_{s=1}^{m} a_{is}\cdot b_{sj}$$

をその（ｉ，ｊ）要素とする行列を作ることをいい，これをＡＢと表す。ＡＢは（ℓ, n）型行列になる。

例えば，Ａ及びＢを

$$A=\begin{bmatrix}4 & 8\\ 2 & 1\\ 3 & 6\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

とすると，行列Ａの列数（＝２）と行列Ｂの行数（＝２）は等しいので，掛け算可能であり，

$$AB=\begin{bmatrix}4\times2+8\times0 & 4\times5+8\times1\\ 2\times2+1\times0 & 2\times5+1\times1\\ 3\times2+6\times0 & 3\times5+6\times1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}8 & 28\\ 4 & 11\\ 6 & 21\end{bmatrix}$$

と（３，２）型の行列になる。

Ａ及びＢがともに同じ型の正方行列であるとき，ＡＢもＢＡも型の等しい正方行列となるが，結果は必ずしも等しくない。

例えば，Ａ及びＢを

$$A=\begin{bmatrix}4 & 8\\ 2 & 1\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

とすると，ＡＢ及びＢＡはそれぞれ次のようになる。

$$AB=\begin{bmatrix}8 & 28\\ 4 & 11\end{bmatrix}\qquad BA=\begin{bmatrix}18 & 21\\ 2 & 1\end{bmatrix}$$

行列の掛け算が，通常の数の掛け算と最も異なる点は，この交換の法則が成り立たないことである。したがって，掛け算を行う場合は，掛ける順序に注意する必要がある。

Ａを任意の正方行列，Ｉを単位行列とするとき，次の式が常に成り立つ。

$$AI=A\qquad IA=A$$

もちろん，この単位行列Ｉは，掛け算が行えるように，行数及び列数を定めておく必要がある。

なお，行列の掛け算では，結合の法則及び分配の法則が成り立つ。すなわち，行列Ａ，Ｂ，Ｃ，に関して，次の式が成り立つ。

結合の法則　（ＡＢ）Ｃ＝Ａ（ＢＣ）
分配の法則　（Ａ（Ｂ±Ｃ）＝ＡＢ±ＡＣ
　　　　　　（Ｂ±Ｃ）Ａ＝ＢＡ±ＣＡ

ただし，これら式中の行列Ａ，Ｂ，Ｃは，それぞれの式において演算ができるような型のものでなければならない。

ウ. 行列と数との乗算

行列と数との間には，掛け算だけが考えられる。ある行列をある数で割るとは，その数の逆数を掛けるということである。これは，掛け算として行うことができる。

ある行列Ａとある数Ｋとの掛け算とは，行列Ａの各要素にＫを掛けることをいい，ＫＡ又はＡＫと表す（数は前から掛けても後ろから掛けても同じである。）。

したがって，

$KA=K\,(a_{ij})=(K a_{ij})$ となる。

例えば，Ａ及びＫを

$$A=\begin{bmatrix}4 & 2 & 8 & 6\\ 1 & 5 & 3 & 4\\ 2 & 9 & 0 & 5\end{bmatrix}\qquad K=\ 2$$

とすると，ＫＡは次のようになる。

$$KA=\begin{bmatrix}8 & 4 & 16 & 12\\ 2 & 10 & 6 & 8\\ 4 & 18 & 0 & 10\end{bmatrix}$$

エ. 逆行列

正方行列Ａに対して，次の式を満たすA^{-1}が存在するとする。

$$AA^{-1}=I$$

このとき，A^{-1}をＡの逆行列という。また，$A^{-1}A=I$が成り立つ。

ここで，（２，２）型正方行列の逆行列の求め方を示すことにする。

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$$

とすると，$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$のとき，

$$A^{-1}=\frac{1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\begin{bmatrix}a_{22} & \triangle a_{12}\\ \triangle a_{21} & a_{11}\end{bmatrix}$$

となる。

例えば，

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\end{bmatrix}$$

とすると，A^{-1}は次のようになる。

$$A^{-1}=\frac{1}{2\times3-1\times5}\begin{bmatrix}3 & \triangle1\\ \triangle5 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & \triangle1\\ \triangle5 & 2\end{bmatrix}$$

検算すると，

$$AA^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & \triangle1\\ \triangle5 & 2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2\times3+1\times(\triangle5) & 2\times(\triangle1)+1\times2\\ 5\times3+3\times(\triangle5) & 5\times(\triangle1)+3\times2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\ I\quad となる。$$

(4) 連立１次方程式と行列

行列を用いて，連立１次方程式を表してみよう。
連立１次方程式の一般形式を示すと，次のとおりである。

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}X_n = b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots\cdots + a_{2n}X_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + \cdots\cdots + a_{nn}X_n = b_n \end{cases}$$

ここで，Ｘは未知数を示す。この連立１次方程式を行列を用いて表すと，次のようになる。

$AX = B \quad \cdots\cdots ①$

なお，Ａ，Ｘ，Ｂは次のような行列である。
例えば，次の連立１次方程式

$$\begin{cases} 0.71X\mathrm{I} + 1.51X2 + 8.33X3 = 5.12 \\ 7.77X1 + 5.52X2 - 2.12X3 = 0.82 \\ 4.42X1 + 5.57X2 + 1.62X3 = \triangle 6.73 \end{cases}$$

は，行列を用いて，次のように表すことができる。

$$\begin{bmatrix} 0.71 & 1.51 & 8.33 \\ 7.77 & 5.52 & \triangle 2.12 \\ 4.42 & 5.57 & 1.62 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.12 \\ 0.82 \\ \triangle 6.73 \end{bmatrix}$$

(5) 連立１次方程式の解法

①式の両辺に行列Ａの逆行列Ａ－１を左から掛けると，

$A^{-1}AX = A^{-1}B$

となり，これを整理すると，

$X = A^{-1}B$

となる。これが，連立１次方程式の解法である。
例えば，前項の例で，Ａの逆行列A^{-1}は，

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.14944 & 0.31654 & \triangle 0.35421 \\ \triangle 0.15814 & \triangle 0.25688 & 0.47698 \\ 0.13598 & 0.01959 & \triangle 0.05627 \end{bmatrix}$$

であるので，Ｘは，

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 3.40853 \\ \triangle 4.23039 \\ 1.09098 \end{bmatrix}$$

と求められる。

$$\begin{cases} X_1 = 3.41 \\ X_2 = \triangle 4.23 \\ X_3 = 1.09 \end{cases}$$